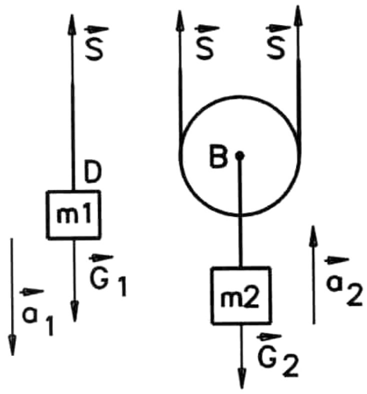
Postulaten van Newton

1.1 Ideale katrol

Oplossing: De massa m_1 wordt vrijgemaakt. Het geheel van katrol B en massa m_2 wordt vrijgemaakt. Vermits de massa van B verwaarloosbaar is, kan verondersteld worden dat de kracht in het touw constant is. Dit levert de krachten die aangegeven zijn in de figuur.



Er wordt bv. verondersteld dat m_1 naar onder versnelt. B en m_2 versnellen bijgevolg naar boven.
De evenwichtsvergelijkingen in verticale richting zijn:

$$G_1 - S = m_1.a_1 \qquad (1)$$

$$G_2 - 2S = -m_2.a_2 \qquad (2)$$

In deze 2 vergelijkingen komen 3 onbekenden voor. Verder is er een verband tussen de versnellingen:

$$a_1 = 2.a_2 \qquad (3)$$

Dit levert 3 vergelijkingen in 3 onbekenden:
(1) herschreven geeft:

$$S = m_1.(g - a_1) \qquad (4)$$

(4) en (3) in (2) geeft:

$$m_2.g - 2.m_1(g - 2a_2) + m_2.a_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_2.g - 2.m_1.g = a_2(-m_2 - 4m_1)$$

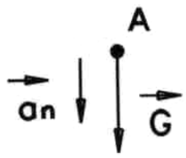
$$\Rightarrow a_2 = \frac{m_2.g - 2.m_1.g}{-m_2 - 4m_1} = \frac{2.m_1 - m_2}{m_2 + 4.m_1}.g$$

$$= \frac{2.40 - 100}{100 + 4.40}.10 = \frac{-200}{260} = -0{,}77\frac{m}{s^2}$$

m_2 beweegt dus naar beneden met een versnelling van $0{,}77 m/s^2$.
S = 40(10+2.0,77) = 462N
Er wordt vastgesteld dat $S > m_1.g$ vermits de massa m_1 omhoog beweegt. Verder is $2S < m_2.g$, wat overeenkomt met een versnelling van m_2 naar beneden.

1.2 Looping in een verticaal vlak

Oplossing: Het gaat hier om 2 afzonderlijke, maar gelijkaardige vraagstukken.

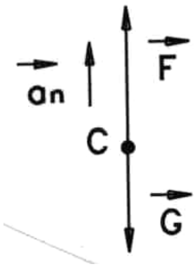


Vliegtuig komt voorbij in A

"gewichtloos" betekent dat de zetel geen kracht uitoefent op de piloot.

$G = m.a_n$

$\Rightarrow m.g = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{r.g} = \sqrt{250.10} = 50m/s$



Vliegtuig komt voorbij in C

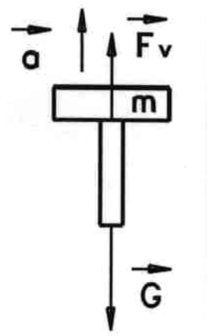
Een schijnbaar "gewicht" van 300 kg (m.a.w. 3000N) betekent dat de zetel een opwaartse kracht uitoefent van 3000N.

De evenwichtsvergelijking in verticale richting, levert dus:

$F - G = m.a_n \Rightarrow 3000 - 600 = 60.\frac{v^2}{250} \Rightarrow v = 100m/s$

1.3 Accelerometer

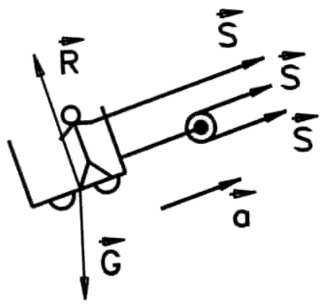
Oplossing: Het volstaat de massa die zich in de accelerometer bevindt, vrij te maken.



$$-G + F_v = m.a$$
$$\Rightarrow m.(g+a) = k.\Delta l$$
$$\Leftrightarrow m.(g+4g) = k.\Delta l$$
$$\Leftrightarrow \frac{m.5g}{\Delta l} = k = \frac{0{,}25.5.10}{0{,}005} = 2{,}5.1000 = 2500 N/m$$

1.4 Wagentje op een hellend vlak

Oplossing: De massa van de katrolletjes is verwaarloosbaar waardoor de trekkracht over gans de lengte van het touw gelijk is.



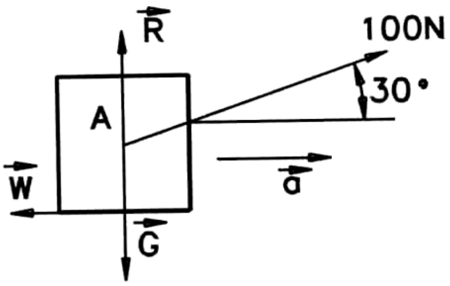
Vrijmaken van het systeem dat bestaat uit karretje, persoon en 1 katrol, levert:

$3S - m.g.\sin 30 = m.a$

$$\Rightarrow a = \frac{3S - m.g.\sin 30}{m} = \frac{3.320 - \frac{120.10}{2}}{120} = \frac{960}{120} - 5 = 3\frac{m}{s^2}$$

1.5 Blok gesleept over een horizontaal vlak

Oplossing: Veronderstel dat het blok over de grond sleept.



Vrijmaken van het blok en schrijven van verticaal evenwicht, levert:

$R - G + 100.\sin 30 = 0$

$\Rightarrow R = 250 - 50 = 200N$

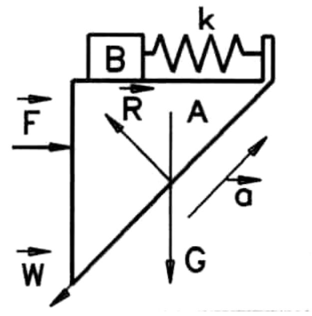
R > 0, wat de gemaakte veronderstelling bevestigt.

De maximale wrijvingskracht W is 0,2.200 = 40N

$100.\cos 30 - 40 = 25.a_x \Rightarrow a_x = 1{,}86 m/s^2$

1.6 Blokken op een hellend vlak, verend verbonden

Oplossing: In de evenwichtstoestand ligt B stil t.o.v. A. Het systeem A-B kan dus als geheel worden vrijgemaakt.



Veronderstel dat het geheel schuin naar rechts beweegt. Horizontaal en verticaal evenwicht leveren:

$$\begin{cases} F - R\cos 45 - W\cos 45 = (m_A + m_B).a\cos 45 \\ -(m_A + m_B).g + R\cos 45 - W\cos 45 = (m_A + m_B).a.\cos 45 \end{cases}$$

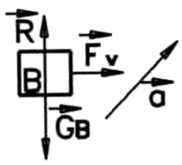
$$\begin{cases} 200 - R(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.0{,}2) = 6.\frac{\sqrt{2}}{2}.a \\ -60 + R(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.0{,}2) = 6.\frac{\sqrt{2}}{2}.a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 260 = \sqrt{2}.R$$

$$\Rightarrow R = \frac{260}{\sqrt{2}} N = 184N$$

$$\Rightarrow a = \frac{200 - \frac{260.1{,}2.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.2}}{3.\sqrt{2}} = \frac{44}{3.\sqrt{2}} = 10{,}4\frac{m}{s^2}$$

Beschouw nu blok B afzonderlijk:



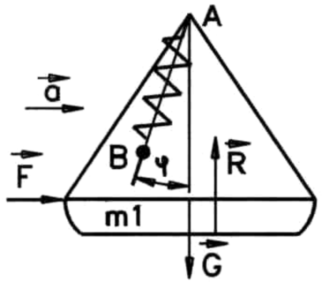
$$F_v = m_B.a.\cos 45$$

$$\Leftrightarrow (l - l_o).k = 1.\frac{44}{3\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{3}$$

$$\Leftrightarrow l = 0{,}2 + \frac{22}{3.100} = 0{,}27m$$

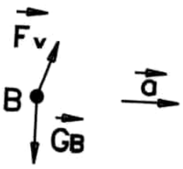
1.7 Slede

Oplossing: In de evenwichtstoestand zijn er geen relatieve bewegingen in het systeem van slede met veer en bol B.
De veer heeft zich ingesteld met een bepaalde lengte en onder een bepaalde hoek met de verticale.



Horizontaal evenwicht van het geheel levert:

$$(m_1 + m_B).a = F \Rightarrow a = \frac{150}{30} = 5\frac{m}{s^2}$$



Vrijmaken van bol B levert een horizontaal en verticaal evenwicht.

$$\begin{cases} F_v.\cos\varphi - m_B.g = 0 \\ F_v.\sin\varphi = m_B.a \end{cases}$$

$$\Rightarrow tg\varphi = \frac{m_B.a}{m_B.g} = 0,5$$

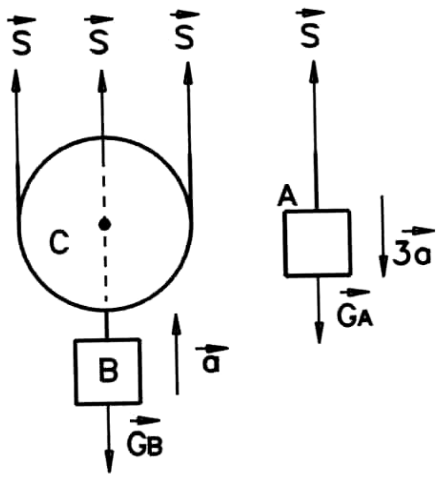
$$\Rightarrow \varphi = 26,56^o$$

$$\Rightarrow F_v = \frac{10.5}{\sin 26,56} = 111,8N$$

$$F_v = k(l - l_o) \Rightarrow l = \frac{112}{1000\sqrt{5}} + 0,2 = 0,25m$$

1.8 Katrolsysteem

Oplossing: vraagstuk a



Maak de massa B samen met wiel C vrij.
Veronderstel dat het geheel naar boven versnelt.
Het verticaal evenwicht levert dan:

$3.S - G_B = m_B.a$

Het verticaal evenwicht van de massa in A levert:

$-S + G_A = m_A.3.a$

Het stelsel dat moet opgelost worden is dus:

$$\begin{cases} 3.S - 1000 = 100.a \\ -S + 400 = 40.3.a \end{cases}$$

$\Rightarrow S = 400 - 120a$

$\Rightarrow 1200 - 360a - 1000 = 100a$

$\Rightarrow a = \frac{200}{460} = 0{,}435\frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow S = 400 - 120.0{,}435 = 348N$

vraagstuk b

Maak de massa B samen met wiel C vrij.
Veronderstel dat het geheel naar boven versnelt.
Het verticaal evenwicht levert dan:

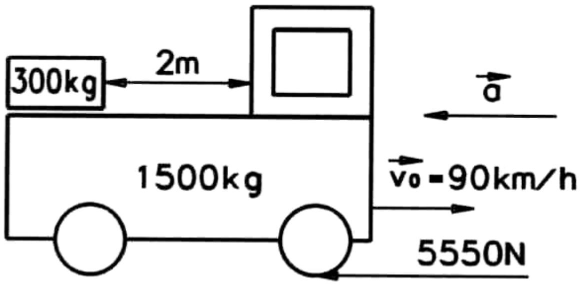
$3.S - G_B = m_B.a$

De trekkracht S in het touw is nu 400N

$\Rightarrow a = \frac{3.400 - 1000}{100} = 2\frac{m}{s^2}$

1.9 Kist op een vrachtwagen

Oplossing: De vertraging is verschillend naargelang de kist over de vrachtwagen schuift of niet. Dit wordt eerst onderzocht.
Veronderstel eerst dat de kist niet beweegt t.o.v. de vrachtwagen.
Dan kan het geheel (kist + vrachtwagen) worden vrijgemaakt.



$$5550 = (1500 + 300).a$$

$$\Rightarrow a = \frac{5550}{1800} = 3{,}08\frac{m}{s^2}$$

Ook de kist ondervindt dus een versnelling van 3,08m/s^2. Deze versnelling wordt rechtstreeks veroorzaakt door de wrijving:

$$W_k = 300.3{,}08 = 924N$$

Nu is de maximale wrijving: 0,3.3000 = 900N.
Dit betekent dat de kist verschuift over de vrachtwagen.

De versnelling van de vrachtwagen wordt berekend uit:

$$5550 - 900 = m_v.a_v = 1500.a_v$$

$$\Rightarrow a_v = \frac{4650}{1500} = 3{,}1\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow v_v = v_0 - a_v.t = 25 - 3{,}1.t$$

De versnelling van de kist wordt berekend met de maximale wrijving.

$$m_k.a_k = 900 \Rightarrow a_k = 3\frac{m}{s^2}$$

De bekomen versnellingen van vrachtwagen en kist zijn geldig zolang de kist niet tegen de voorkant van de laadbak gebotst is. Er moet dus gecontroleerd worden of de kist gedurende de remperiode tegen de voorkant komt.
De vrachtwagen zou tot stilstand komen als:

$$v_v = 25 - 3{,}1.t = 0 \Leftrightarrow t = 8{,}06s$$

De relatieve versnelling van vrachtwagen t.o.v. kist is: 0,1m/s^2.
De relatieve afgelegde weg in 8,06s is dus:

$$\Delta s_{rel} = \frac{1}{2}.0{,}1.8{,}06^2 = 3{,}245m$$

Dit is niet mogelijk, want na 2 m komt de kist vooraan de laadbak.

Het tijdsverloop tot de botsing volgt uit:

$$\Delta s_{rel} = 2 = \frac{1}{2}.0{,}1.t_b{}^2 \Rightarrow t_b = 6{,}325s$$

De snelheden van de vrachtwagen en van de kist op het ogenblik van de botsing, kunnen berekend worden.

$$v_v = 25 - 3{,}1.t_b = 5{,}394 m/s$$

$$v_k = 25 - 3.t_b = 6{,}026 m/s$$

Veronderstel dat de botsing geen snelheidsveranderingen oplevert en dat de botsingsenergie verloren gaat in warmte.
Na de botsing is a = 3,08m/s^2.
De vrachtwagen komt tot stilstand als

$$v_v = 25 - 3{,}1.t_b - 3{,}08.t = 0$$

$$\Leftrightarrow 5{,}394 - 3{,}08.t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1{,}751s$$

De totale remtijd is dus 6,325s + 1,751s = 8,076s
De totale remweg is dus:

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 25.t_b - \frac{3{,}1.t_b^2}{2} + 5{,}394.t - \frac{3{,}08.t^2}{2}$$

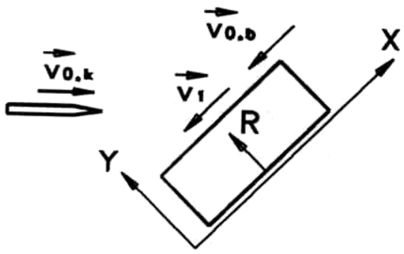
$$\Leftrightarrow \Delta s = 25.6{,}325 - \frac{3{,}1.6{,}325^2}{2} + 5{,}394.1{,}751 - \frac{3{,}08.1{,}751^2}{2}$$

$$= 100{,}67m$$

Eerste wet van behoud

2.1 Inslag van een kogel

Oplossing: Kies een XY assenstelsel met de X-as evenwijdig met de helling.



ogenblik t_o: vlak voor de inslag van de kogel
ogenblik t_1: vlak na de inslag van de kogel

$\vec{N} = m_k \vec{v}_{1,k} + m_b \vec{v}_{1,b} - m_k \vec{v}_{0,k} - m_b \vec{v}_{0,b}$

De stoot van de gewichten is verwaarloosbaar door het extreem korte tijdsverschil tussen t_o en t_1.

Projectie van de vectorvergelijking op de X-as:

$0 = -(m_k + m_b)v_1 - m_k v_{0,k} \cos 45 + m_b v_{0,b}$

Hierin is $v_{0,k} = 500 m/s$

$$v_{0,b} = \frac{G_b \cos 45}{m_b} = \frac{0{,}2.\cos 45}{0{,}02} = 7\frac{m}{s}$$

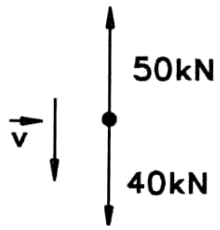
Waaruit $$v_1 = \frac{-0{,}02.500.\cos 45 + 2.7}{2{,}02} = 3{,}5\frac{m}{s}$$

Projectie van de vectorvergelijking op de Y-as:

$R = m_k v_{0,k} \cos 45 = 7{,}07 Ns$

2.2 Landing van een ruimtetuig

Oplossing: De krachten die inwerken op de raket zijn voorgesteld in de figuur.



$$\vec{N} = \int_{t0}^{t1} \vec{F}.dt = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 \Rightarrow \vec{F}.5 = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$

Projectie op een Y-as, gericht naar het aardoppervlak toe, levert:

$$(-50000 + 40000).5 = 4000(v_1 - 20)$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{-50000}{4000} + 20 = 7{,}5\frac{m}{s}$$

2.3 Wagentje op rails

Oplossing: Kies als ogenblik t_0: A staat stil op de wagen.
Kies voor t_1: A zweeft door de lucht tussen wagen en grond.
De totale hoeveelheid van beweging in de rijrichting verandert niet.
$\Rightarrow (m_A + m_w)v_0 = m_A v_{1,A} + m_w v_{1,w}$
Nu is gegeven dat $v_{1,A} = v_{1,w} - 2$
$\Rightarrow (60 + 240).3 = 60.(v_{1,w} - 2) + 240 v_{1,w}$
$\Rightarrow v_{1,w} = 3{,}4\frac{m}{s}$
Kies als ogenblik t_2: B zweeft door de lucht tussen grond en wagen.
Kies voor t_3: B staat stil op de wagen.
De totale hoeveelheid van beweging in de rijrichting verandert niet.
$\Rightarrow m_B v_{2,B}.\cos 30 + m_w v_{2,w} = (m_B + m_w)v_3$
$\Rightarrow 80.5.\cos 30 + 240.3{,}4 = 320.v_3$
$\Rightarrow v_3 = 3{,}63\frac{m}{s}$

<u>Opmerking:</u> Indien het afspringen gebeurt na het opspringen:
$v_1 = 3{,}28\frac{m}{s}$
en $v_3 = 3{,}60\frac{m}{s}$

2.4 Koffer op een karretje

Oplossing: Tijdens het neerkomen van de koffer wordt de hoeveelheid van beweging in de horizontale richting niet gewijzigd.

$$\Rightarrow m_k . v_{0,k} + m_w v_{0,w} = m_k v_{1,k} + m_w v_{1,w}$$

nu is: $v_{0,k} = 3\frac{m}{s}$

$v_{0,w} = 0$

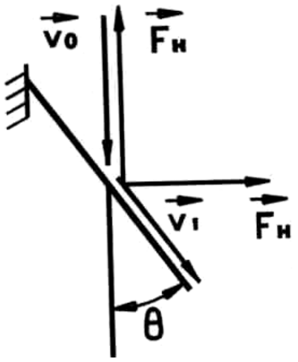
$v_{1,k} = v_{1,w}$

$$\Rightarrow 10.3 = (10 + 100).v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = 0{,}272\frac{m}{s}$$

2.5 Turbine

Oplossing: De kracht die nodig is om het turbineblad stil te houden is gelijk aan de kracht die de turbine uitoefent op het water.



$\vec{F}.\Delta t = m.(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$

kies nu een tijdsinterval van 1s

$\Rightarrow \vec{F} = \rho.v_0.\pi r^2.(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$

projectie op een horizontale en verticale as:

$$\begin{cases} F_H = \rho.v_0.\pi r^2.v_1.\sin\theta \\ F_V = \rho.v_0.\pi r^2.v_0 - \rho.v_0.\pi r^2.v_1.\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_H = \rho.\pi r^2.v^2.\sin\theta \\ F_V = \rho.\pi r^2.v^2 - \rho.\pi r^2.v^2.\cos\theta \end{cases}$$

$$F = \rho.\pi r^2.v^2.\sqrt{(\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta)}$$

$$F = \rho.\pi r^2.v^2.\sqrt{(2 - 2\cos\theta)}$$

$$F = \rho.\pi r^2.v^2.\sqrt{2}.\sqrt{(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2})}$$

$$F = 2\rho.\pi r^2.v^2.\sin\frac{\theta}{2}$$

2.6 Versnelling van een raket

Oplossing: De totale hoeveelheid van beweging van trap 2 en trap 3 tesamen, blijft gelijk.

$m_2.v_{0,2} + m_3.v_{0,3} = m_2.v_{1,2} + m_3.v_{1,3}$

Nu is $v_{0,2} = v_{0,3} = 5000km/h = 1388{,}889m/s$

$v_{1,2} + 10 = v_{1,3}$

$8000.1388{,}889 = 3000.v_{1,2} + 5000.(v_{1,2} + 10)$

$v_{1,2} = 1382{,}639\frac{m}{s}$

$v_{1,3} = 1392{,}639\frac{m}{s}$

De snelheidsverandering van de derde trap is dus: 3,7499m/s

$a = \frac{3{,}750}{0{,}5}\frac{m}{s^2} = 7{,}5\frac{m}{s^2}$

De stuwkracht is dus:

T = 7,5.5000 = 37500N

Opmerking: Om problemen met afrondingsfouten te vermijden kan beter in km/h gerekend worden.

Tweede wet van behoud

3.1 Vallende massa

Oplossing: Op de massa werken de zwaartekracht en de veerkracht. De som van potentiële en kinetische energie is dus constant.

Stand A: $V = m.g.h = 10.10.0{,}6 = 60J$

Stand B: $V = \dfrac{k.\Delta l^2}{2}$

$$\Delta l = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$V = \frac{300.0{,}2^2}{2} = 6J$$

$$E_k = 60 - 6 = 54J$$

$$v = \sqrt{\frac{2.54}{10}} = 3{,}29 m/s$$

3.2 Lancering van een raket

Oplossing: De kinetische energie op 40 km hoogte wordt omgezet in potentiële energie overeenkomstig het hoogteverschil tussen 600km en 40km.

De te gebruiken formule voor potentiële energie is: $V = \dfrac{-G.m.m'}{R+h}$

Behoud van energie : $\dfrac{-G.m.m'}{R+40} + \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{-G.m.m'}{R+600}$

nu is $G.m' = g.R^2$

$$\Rightarrow \frac{-g.R^2}{R+40} + \frac{v^2}{2} = \frac{-g.R^2}{R+600}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{+0{,}01.6371^2}{6371+40} - \frac{0{,}01.6371^2}{6371+600}$$

waaruit: $v = 3{,}189\text{km/s}$

3.3 Slingerende massa

Oplossing: Op het geheel van karretje met massa werkt enkel de zwaartekracht en de reactiekracht van de vloer. Deze reactiekracht levert geen arbeid.
Er is dus enkel uitwisseling van kinetische en potentiële energie.
Begintoestand: $V = m.g.h = 10.10.(1 - 1\cos 60) = 50J$
Moment dat C voorbij AB komt:

Totale impuls is nul: $m_C.v_C = m_k.v_k$

$10.v_C = 20.v_k \Rightarrow v_C = 2v_k$

Behoud van energie

$$\frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{m_k v_k^2}{2} = 50$$

$$(\frac{10.4}{2} + \frac{20}{2})v_k^2 = 50$$

$$v_k = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1{,}29m/s$$

$$v_c = 2.1{,}29m/s2{,}58M/s$$

De relatieve snelheid van C t.o.v. de kar is dus: 3,87m/s

3.4 Slede op hellend vlak

Oplossing: Stel de potentiële energie gelijk aan 0 in de begintoestand.
Als A 10m langs de helling is gegleden:

$$E_k = \frac{m_A.v^2}{2} + \frac{m_B.\frac{v^2}{4}}{2} = 26{,}875v^2$$

wrijvingswarmte

$$Q = f_d.R_A.\Delta s_A + f_d.R_B.\Delta s_B$$

$$= 0{,}1.500.\cos 30.10 + 0{,}1.150.\cos 30.5$$

$$\Rightarrow Q = 498J$$

$$V = V_A + V_B = -50.10.5 + 15.10.2{,}5 = -2125J$$

Behoud van energie:

$$E_k + Q + V = 0$$

$$\Rightarrow 26{,}875v^2 + 498 - 2125 = 0$$

$$\Rightarrow v = 7{,}78\frac{m}{s}$$

3.5 Slingerende massa aan een paal

Oplossing: Toestand 0: begintoestand
Toestand 1: vlak voor de botsing van A met B
Toestand 2: vlak na de botsing van A met B
Toestand 3: B in hoogste stand, nl. B'
Behoud van energie tussen 0 en 1:

$$V_{A,0} = m_A.g.h_A = 2.10.1{,}25 = 25J$$

$$E_{k,A,1} = 25J = \frac{m_A.v_{A,1}^2}{2} = \frac{2.v_{A,1}^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_{A,1} = 5\frac{m}{s}$$

Behoud van energie voor B tussen 2 en 3:

$$V_{B,3} = m_B.g.h_B = 1.10.(1{,}25 - 1{,}25\cos 60) = 6{,}25J$$

$$E_{k,B,2} = 6{,}25J = \frac{m_B.v_{B,2}^2}{2} = \frac{v_{B,2}^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_{B,2} = 3{,}54\frac{m}{s}$$

Behoud van impuls tussen 1 en 2:

$$m_A.v_{A,1} = m_B.v_{B,2} + m_A.v_{A,2}$$

$$\Leftrightarrow 2.5 = 1.3{,}54 + 2.v_{A,2}$$

$$\Rightarrow 10 - 3{,}54 = 2.v_{A,2}$$

$$\Rightarrow v_{A,2} = 3{,}23m/s$$

$$\Rightarrow E_{k,A,2} = 10{,}43J$$

Energieverlies: 25 -6,25-10,43 = 8,32J

3.6 Verend verbonden massa's

Oplossing: De potentiële energie van de veer wordt omgezet in kinetische energie van beide massa's. De snelheid van beide massa's is zodanig dat de totale hoeveelheid van beweging nul is.

$$V_{veer} = \frac{k.(\Delta l)^2}{2} = 1000.\frac{0{,}1^2}{2} = 5J$$

Wet van behoud van impuls:

$$m_1.v_1 = m_2.v_2$$

$$\Rightarrow v_1 = 2.v_2$$

Wet van behoud van energie:

$$\frac{m_1.v_1^2}{2} + \frac{m_2.v_2^2}{2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2v_2)^2}{2} + \frac{2.v_2^2}{2} = 5$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 10/6$$

$v_1 = 2{,}58$m/s

$v_2 = 1{,}29$m/s

3.7 Vallende massa geremd door een veer

Oplossing: De potentiële energie door de hoogte wordt omgezet in kinetische energie. Deze wordt op zijn beurt omgezet in potentiële energie van de veer, waarbij de potentiële energie door de hoogte nog verder vermindert. Door de wrijving wordt ondertussen nog warmte ontwikkeld.

In A: $E_k = \frac{m.v_A^2}{2} = \frac{10.3^2}{2} = 45J$

$V = m.g.h = 10.10.6 = 600J$

In meest ingedrukte stand van de veer:

$E_k = 0$

$V_{veer} = \frac{k.(\Delta l)^2}{2} = \frac{6000}{2}.(\Delta l)^2 = 3000(\Delta l)^2$

$V_{hoogte} = -m.g.h = -10.10.\frac{\Delta l}{2} = -50\Delta l$

Geproduceerde warmte: $W_m.\Delta_s = f_d.R.(12+\Delta l)$

$\Leftrightarrow W_m.\Delta_s = f_d.mg\cos 30.(12+\Delta l)$

$\Leftrightarrow W_m.\Delta_s = 30.(12+\Delta l)$

Behoud van energie: $45 + 600 = 3000.(\Delta l)^2 - 50.\Delta l + 360 + 30.\Delta l$

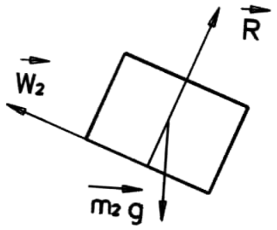
$\Leftrightarrow 3000.(\Delta l)^2 - 20.\Delta l - 285 = 0$

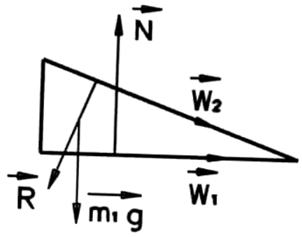
$\Leftrightarrow \Delta l = 0{,}31m$

Opmerking: Er is stilzwijgend verondersteld dat door de botsing van de massa met de veer geen energie verloren gaat. In de praktijk is dit verantwoord doordat de botsingsenergie wordt omgezet in vervormingsenergie, hier van de veer.

3.8 Hellend vlak op een horizontaal vlak

Oplossing:





1. Controleer of m_2 glijdt.
   $R = m_2.g.\cos 30 = 173N$
   $W_{2,max} = f_s.R = 34{,}6N$
   De component van het gewicht die glijden 'veroorzaakt':
   $m_2.g.\sin 30 = 100N$
   Dit betekent dat m_2 naar beneden glijdt.

2. Controleer of m_1 glijdt.
   $N = R.\cos 30 + m_1.g + W_2.\sin 30$
   $\Rightarrow N = \frac{173.\sqrt{3}}{2} + 40.10 + 0{,}05.173.0{,}5$
   $\Rightarrow N = 554N$

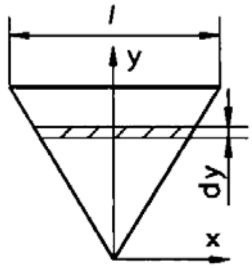
   $W_{1,max} = f_s.N = 111N$
   De drijvende kracht voor het bewegen van m_1 is:
   $R.\sin 30 - W_2.\cos 30 = 173.0{,}5 - 0{,}05.173.0{,}87 = 79N$
   m_1 glijdt bijgevolg niet.

3. Potentiële energie van massa m_2 in begintoestand.
   $V = 20.10.0{,}5 = 100J$
4. Wrijvingswarmte
   $Q = W_2.\Delta s = f_d.R.\Delta s = 0{,}05.173.1 = 8{,}65J$
5. Kinetische energie in eindtoestand en behoud van energie
   $E_k = \frac{m_2.v^2}{2} = 100 - 8{,}65 = 91{,}35J$
   $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{91{,}35.2}{20}} = 3\frac{m}{s}$

Traagheidsgrootheden

4.1 Zeshoekige plaat

Oplossing: Het volstaat het traagheidsmoment te berekenen van een driehoek zoals voorgesteld in de figuur.



$$I_0 = \int (x^2 + y^2).dm$$

$$I_0 = \int_0^{l\cos 30} \left(\int_0^{y\,tg30} (x^2 + y^2).d.\rho.dx \right).dy$$

$$I_0 = d.\rho. \int_0^{l\cos 30} \left(\frac{x^3}{3} + y^2.x \right)\Bigg|_0^{y\,tg30} .dy$$

$$I_0 = d.\rho. \int_0^{l\cos 30} \left(\frac{(tg30)^3 y^3}{3} + y^3.tg30 \right).dy$$

$$I_0 = d.\rho. \int_0^{l\cos 30} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3.\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).y^3.dy$$

$$I_0 = d.\rho. \int_0^{l\cos 30} \frac{10}{9\sqrt{3}}.y^3.dy$$

$$I_0 = d.\rho.\frac{10}{4.9.\sqrt{3}}.y^4\Bigg|_0^{l\cos 30}$$

$$I_0 = d.\rho.\frac{10}{4.9.\sqrt{3}}.l^4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{d.\rho.5}{32.\sqrt{3}}.l^4$$

De massa van de driehoek is: $m_d = \dfrac{l.l\cos 30.d.\rho}{4} = \dfrac{l^2.d.\rho.\sqrt{3}}{8}$

zodat: $I_0 = m_d.\dfrac{5.l^2}{12}$

Voor de zeshoek geldt: $I_0 = \dfrac{5.m.l^2}{12}$

4.2 Open doos

Oplossing:

$$I_{zijkant} = 1{,}5.8.0{,}006.7850.(\frac{1{,}5^2 + 8^2}{12} + (3^2 + 0{,}75^2))$$
$$= 565{,}2.(5{,}52 + 9{,}56) = 8525$$

$$I_{onderkant} = 2.8.0{,}006.7850.(\frac{8^2}{12} + 3^2)$$
$$= 753{,}6.14{,}33 = 10802$$

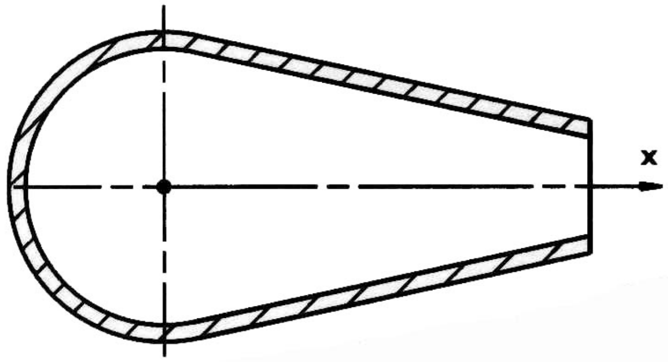
$$I_{voorkant} = 1{,}5.2.0{,}006.7850.(\frac{1{,}5^2}{12} + (7^2 + 0{,}75^2))$$
$$= 141{,}3(0{,}187 + 49{,}56) = 7030$$

$$I_{achterkant} = 1{,}5.2.0{,}006.7850.(\frac{1{,}5^2}{12} + (1^2 + 0{,}75^2))$$
$$= 141{,}3(0{,}187 + 1{,}56) = 247$$

$$I_{laadbak} = 2.8525 + 10802 + 7030 + 247 = 35129 \text{kgm}^2$$

4.3 Betonmolen

Oplossing:



Het massacentrum is natuurlijk gelegen op de rotatie as.
De x coördinaat van het massacentrum wordt gevonden uit:

$$\int_{-2}^{+4} x.dm = m.x_C$$

$$m = \rho.(\frac{4.\pi.R_{bol}^2.0.02}{2} + 2.\pi.R_{kegel,gem}.0,02.\sqrt{4^2 + 1,5^2})$$

$$m = 7850.(\frac{4.\pi.4.0.02}{2} + 2.\pi.1,25.0,02.\sqrt{4^2 + 1,5^2}) = 9214kg$$

$$\int_{-2}^{+4} x.dm = \rho.\int_0^{\pi/2} -R.d\theta.0,02.2\pi R\cos\theta.R\sin\theta + \rho.\int_0^4 2\pi.(2 - \frac{1,5x}{4}).\frac{dx.\sqrt{4^2 + 1,5^2}}{4}.0,02.x$$

$$\int_{-2}^{+4} x.dm = \rho.(\int_0^{\pi/2} -0,16.\pi.\sin 2\theta.d\theta + \int_0^4 0,1342.(2 - \frac{1,5x}{4}).x.dx)$$

$$\int_{-2}^{+4} x.dm = \rho.(0,08.\pi.\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/2} + 0,1342.x^2\Big|_0^4 - 0,1342.\frac{1,5}{4}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^4)$$

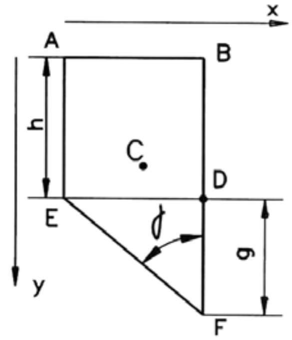
$$\int_{-2}^{+4} x.dm = \rho.(-0,16.\pi + 0,1342.16 - 0,1342.\frac{1,5}{4}.\frac{4^3}{3})$$

$$\int_{-2}^{+4} x.dm = \rho.(-0,16.\pi + 0,1342.8) = 0,57.\rho = 0,57.7850 = 4482$$

$$x_C = \frac{4482}{9214} = 0,486m$$

4.4 Trapeziumvormige plaat

Oplossing:



Noem G1 het massacentrum van ABDE
Noem G2 het massacentrum van DEF

$$m.y_G = m_1.y_{G1} + m_2.y_{G2}$$
$$m.x_G = m_1.x_{G1} + m_2.x_{G2}$$
$$m = m_1 + m_2$$

Dit levert 2 vergelijkingen:

$$(m_1 + m_2).0{,}6 = m_1.\frac{|AE|}{2} + m_2.(\frac{|DF|}{3} + |AE|) = m_1.\frac{h}{2} + m_2.(\frac{g}{3} + h)$$
$$(m_1 + m_2).0{,}6 = m_1.0{,}5 + m_2.0{,}67$$

Noem d de dikte van de plaat en ρ de specifieke massa, dan is:

$$m_1 = d.\rho.h$$
$$m_2 = d.\rho.\frac{g}{2}$$

Het stelsel van 2 vergelijkingen wordt dan:

$$d.\rho(h + \frac{g}{2}).0{,}6 = d.\rho.(h.\frac{h}{2} + \frac{g}{2}.(\frac{g}{3} + h))$$
$$d.\rho(h + \frac{g}{2}).0{,}6 = d.\rho.(h.0{,}5 + \frac{g}{2}.0{,}67)$$

Uiteraard kan dit vereenvoudigd worden:

$$0{,}6h + 0{,}3g = \frac{h^2}{2} + \frac{g^2}{6} + \frac{gh}{2}$$
$$0{,}1h = \frac{g}{3} - \frac{6g}{20}$$

Deze 2de vergelijking levert:

$$h = \frac{g}{3}$$

De eerste vergelijking wordt:

$$0{,}6\frac{g}{3} + 0{,}3g = \frac{g^2}{18} + \frac{g^2}{6} + \frac{g^2}{6}$$

waaruit:

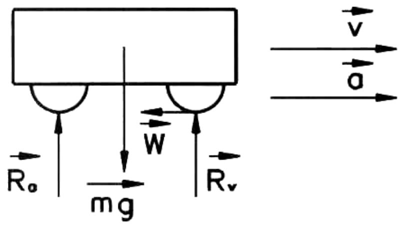
$$0{,}5g = \frac{7g^2}{18}$$

of: $g = 1{,}286$ en $h = 0{,}429$ en $\gamma = 37{,}78^0$

Translatie van een lichaam

5.1 Remmende wagen

Oplossing: a) Vrijmaken van de auto levert de krachten in de figuur.



Index v slaat op voorwielen, index a op achterwielen.

$R_v.1{,}5 - R_a.1{,}5 - W.0{,}5 = 0$

$W = 0{,}3R_v$

$R_v + R_a = m.g$

Dit levert een stelsel van 4 vergelijkingen in de onbekenden:

R_v, R_a, W, a

Oplossen levert:

$R_v = 4211N$

$R_a = 3789N$

$W = 1263N$

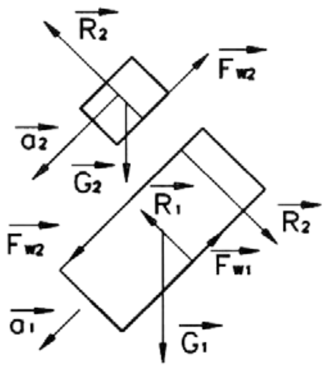
$a = -1{,}579\dfrac{m}{s^2}$

b) $a = -1{,}4 m/s^2$

c) $a = -2{,}727 m/s^2$

5.2 Glijdende kist

Oplossing:



In de figuur zijn de kist en het blok vrijgemaakt.
Evenwicht van het blok:

$R_2 - G_2 \sin 45 = 0$ (1)

$G_2.\sin 45 - F_{w2} = m_2.a_2$ (2)

In geval het blok glijdt over de kist, is

$F_{w2} = 0{,}4.R_2$ (3)

Oplossen levert:

uit (1): $R_2 = 70{,}7\text{N}$

(3) in (2) $G_2.\sin 45 - 0{,}4(G_2 \sin 45) = m_2.a_2$

$\Rightarrow 0{,}6.m_2.g.\sin 45 = m_2.a_2$

$\Rightarrow 4{,}24 = a_2$

uit (3): $F_{w2} = 0{,}4.70{,}7 = 28{,}28\text{N}$

Evenwicht van de kist:

$F_{w2} - F_{w1} + G_1 \sin 45 = m_1.a_1$ (4)

$R_1 - R_2 - G_1 \sin 45 = 0$ (5)

In geval de kist begint te glijden, is

$F_{w1} = 0{,}6.R_1$ (6)

Oplossen levert:

uit (5): $R_1 = 70{,}7 + 400 \sin 45 = 353{,}6\text{N}$

(6) in (4): $28{,}3 - 0{,}6.353{,}6 + 400 \sin 45 = 40.a_1$

$\Rightarrow 2{,}47 = a_1$

$F_{w1} = 0{,}6.354 = 212\text{N}$

$$a_r = 4{,}24 - 2{,}47 = 1{,}77\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Stel nu: $\Delta s = \frac{1}{2}.a_r.(\Delta t)^2 = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2\sqrt{2}}{1{,}77} = 1{,}26\text{s}$$

$$\Delta s_{kist} = \frac{1}{2}.a_1.(\Delta t)^2 = 0{,}5.2{,}47.1{,}26^2 = 1{,}98\text{m}$$

5.3 Vat met olie

Oplossing: 1. Hoogte van het vat = h_v

$$\pi.r^2.h_v = 0{,}21 \Rightarrow h_v = 0{,}743\text{m}$$

2. massa van het vat

$$m_v = (2\pi.r^2 + 2\pi r.h).\text{wanddikte}.\rho$$

$$= (2.\pi.0{,}3^2 + 2\pi.0{,}3.0{,}743).0{,}0007.7850 = 10{,}8\text{kg}$$

3. hoogte van de olie

$$\pi.r^2.h_o = 0{,}20 \Rightarrow h_o = 0{,}707\text{m}$$

4. massacentrum van geheel:

$$200.0{,}93.\frac{0{,}707}{2} + 10{,}8.\frac{0{,}743}{2} = (200.0{,}93 + 10{,}8).h_c$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{0{,}709}{2} = 0{,}3545\text{m}$$

5. totale massa: 196,8kg

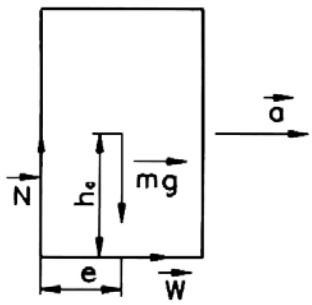
6. maximale wrijving: f.m.g = 0,3.10.196,8 = 580N

7. maximale snelheid om glijden te vermijden:

$$W_{max} = 580\text{N} = m.a_n = m.\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{150.580}{196{,}8}} = 21\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8. maximale snelheid om kantelen te vermijden:



$$N.e - W.h_c = 0$$

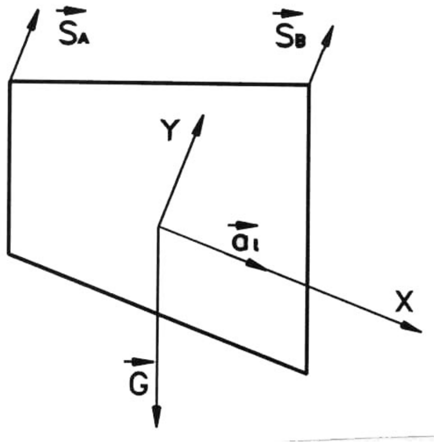
$$m.g.e - m.\frac{v^2}{R}.h_c = 0 \Rightarrow 10.0{,}3 = \frac{v^2}{150}.0{,}3545$$

$$v = 35{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9. Besluit: Het vat zal eerst glijden, nl. bij 75,6km/h.

5.4 Vallende plaat

Oplossing: De plaat voert een translatie uit langs een cirkelvormige baan met als straal de lengte van de ophangtouwen.



Evenwicht en eis van translatie leveren:

$G\sin 30 = m.a_t$ (1)

$-G\cos 30 + S_A + S_B = m.a_n = 0$ (2)

$1{,}2S_A\cos 30 + 0{,}6S_A\sin 30 + 0{,}6S_B\sin 30 - 0{,}9S_B\cos 30 = 0$ (3)

Uit (1): $a_t = 5\frac{m}{s^2}$

Uit (2): $S_A + S_B = m.g.\cos 30 = 6928N$

Uit (3): $1{,}34S_A - 0{,}48S_B = 0 \Leftrightarrow 2{,}79S_A = S_B$

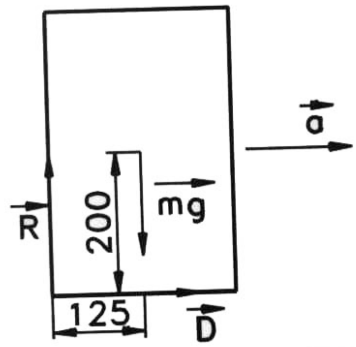
Dit levert:

$S_A = 1826{,}6N$

$S_B = 5096N$

5.5 Vlakke transportband

Oplossing:



Verticaal evenwicht:

$R = m.g$

Horizontaal evenwicht:

$D = m.a$

Eis een translatie:

$0{,}125.R = 0{,}2.D$

Oplossen levert:

$$a = \frac{D}{m} = \frac{\frac{0{,}125}{0{,}2}R}{m} = \frac{0{,}625.m.g}{m} = 6{,}25\frac{m}{s^2}$$

Deze versnelling wordt bereikt na een tijd t:

$a = 0{,}9.2.t = 6{,}25$

$\Leftrightarrow t = 3{,}47s$

Rotatie om een vaste as

6.1 Roterende plaat

Oplossing: De wet van Newton ($\vec{F} = m.\vec{a}_c$), toepassen op de vrijgemaakte rechter helft, levert de evenwichtsvergelijking:

$$S = \frac{m}{2}.\frac{a}{2}.\omega^2 = \frac{m.a.\omega^2}{4}$$

S is de grootte van de kracht die het linker deel uitoefent op het rechter deel. Deze kracht is naar links gericht.

6.2 Vallende staaf in L-vorm

Oplossing: Het gaat hier om rotatie rond een vaste as door B

Bruikbare formule: $M_B = I_B.\alpha$

M_B = moment van de uitwendige krachten t.o.v. B

= moment van gewicht van B

= 4.8.10.2+2.8.10.4

=1280Nm

I_B = massatraagheidsmoment t.o.v. B

$$I_B = 32.\frac{4^2}{12} + 32.2^2 + 16.\frac{2^2}{12} + 16.(4^2 + 1^2)$$

$$I_B = 32.\frac{4^2}{12} + 32.2^2 + 16.\frac{2^2}{12} + 16.(4^2 + 1^2)$$

$$I_B = 448$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1280}{448} = 2{,}857\frac{r}{s^2}$$

6.3 Vallende staaf in T-vorm

Oplossing:

hoekversnelling bij loslaten

Het voorwerp roteert rond punt O.

$M_o = 0{,}1.0{,}2.20.10 + 0{,}22.0{,}4.20.10 = 21{,}6\text{Nm}$

$I_o = I_{o1} + I_{o2}$

$$I_{o1} = 0{,}2.20.(\frac{0{,}2^2 + 0{,}04^2}{12}) + 0{,}2.20.0{,}1^2$$

$$I_{o2} = 0{,}4.20.(\frac{0{,}4^2 + 0{,}04^2}{12}) + 0{,}4.20.0{,}22^2$$

$\Rightarrow I_o = 0{,}5488\text{kg.m}^2$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{M}{I} = 39{,}35\frac{r}{s^2}$$

bewegingsvergelijking

$m_{totaal} = 12\text{kg}$

ligging massacentrum vanaf O:

$12.x_C = 4.0{,}1 + 8.0{,}22 \Rightarrow x_C = 0{,}18\text{m}$

$M = I_o.\alpha$

$\Rightarrow m.g.x_C.\cos\gamma = I_o.\alpha$

$$\Leftrightarrow 120.0{,}18.\cos\gamma = 0{,}549.\frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}549.\frac{d^2\gamma}{dt^2} - 21{,}6.\cos\gamma = 0$$

6.4 Opndraaiende deur

Oplossing: Kies een assenstelsel XYZ vast aan de deur en door het massacentrum van de deur.
XZ vlak is een symmetrievlak
YX vlak is een symmetrievlak
De 3 momenten evenwichten worden dan:

$M_{0X} = 0$

$M_{0Y} = 0$

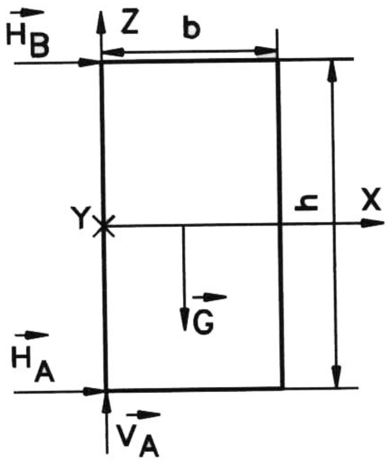
$M_{0Z} = 0$

Met de getekende krachten wordt dit stelsel:

$0 = 0$

$H_A.\frac{h}{2} - H_B.\frac{h}{2} - G.\frac{b}{2} = 0$

$0 = 0$



Evenwicht in X en Y richting levert:

$H_A + H_B = -m.r.\omega^2$

$V_A - G = 0$

Uit de 3 nuttige vergelijkingen volgt:

$V_A = 300N$

$H_A + H_B = -30.0,4.1 = -12N$

$H_A = H_B + 300.0,4$

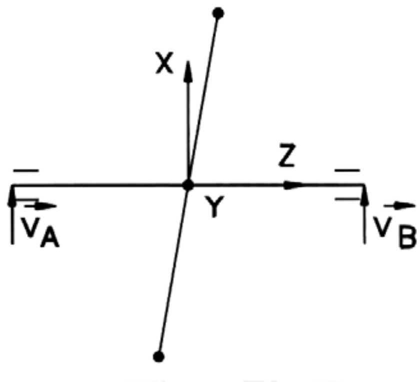
Waaruit:

$H_B = -66N$

$H_A = 54N$

De horizontale reactiekrachten zijn -66N en 54N.

6.5 Niet uitgebalanceerde as



Oplossing:

Kies een assenstelsel met Z de rotatie as.

$M_{0X} = \omega^2.I_{YZ}$

$M_{0Y} = -\omega^2.I_{XZ}$

$M_{0Z} = 0$

Bij het gekozen assenstelsel is:

$I_{YZ} = 0$

$$I_{XZ} = \int X.Z.dm = 2.m.\frac{1}{2}.\sin\gamma.\frac{1}{2}.\cos\gamma = m.\frac{l^2}{4}\sin 2\gamma$$

Het stelsel van 3 vergelijkingen wordt dus:

$M_{0X} = 0$

$$M_{0Y} = -(\frac{1000.2\pi}{60})^2.\frac{\sin 2\gamma}{4} = -476\text{Nm}$$

$M_{0Z} = 0$

Invullen van de linker leden levert:

$H_A = H_B$

$$\frac{V_B}{2} - \frac{V_A}{2} = -476\text{Nm}$$

$0 = 0$

Deze vergelijkingen worden aangevuld met de evenwichtsvergelijkingen:

$H_A + H_B = 0$

$V_A + V_B - 2mg = 0$

$0 = 0$

Oplossen levert :

$H_A = H_B = 0$

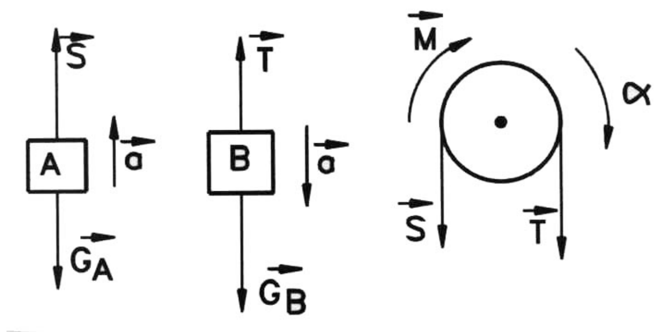
$V_A = 486\text{N}$

$V_B = -466\text{N}$

6.6 Mijnlift

Oplossing:

$I = m.R^2 = 4000.4 = 16000 kgm^2$



$S - G_A = m_A.a \Rightarrow S = 20000 + 2000a$

$G_B - T = m_B.a \Rightarrow T = 10000 - 1000a$

$2T - 2S + M = I.\alpha \Rightarrow 20000 - 2000a - 40000 - 4000a + M = 16000.\frac{a}{2}$

Dit levert een verband tussen koppel en versnelling

$M - 20000 = 14000a$

De aandrijving gebeurt nu met een constant vermogen:

$P = M.\omega = M.\frac{v_A}{R}$

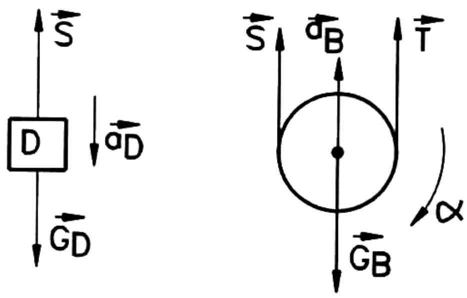
$\Rightarrow M = \frac{R.P}{v_A} = \frac{R.P}{\int a.dt} = \frac{54000}{\int a.dt}$

De gevraagde bewegingsvergelijking is dus:

$\frac{54000}{\int a.dt} - 20000 = 14000a$

Vlakke beweging van lichamen

7.1 Katrolsysteem



Oplossing: Verticaal evenwicht van D en B:

$S - m_D.g = -m_D.a_D$

$T + S - m_B.g = m_B.a_B$

rotatie evenwicht van B

$S.r - T.r = I_B.\alpha$

verbanden tussen versnellingen

$a_D = 2.a_B$

$r.\alpha = a_B$

Dit levert een stelsel van 5 vergelijkingen in 5 onbekenden:

S, T, α, a_B, a_D

Oplossen levert: T = 4N

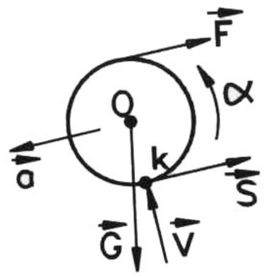
De versnelling van D is 1,33m/s^2 naar beneden.

7.2 Vat bier

Oplossing:

geval a

Het vat ondergaat een ogenblikkelijke rotatie rond k. De wet $M = I.\alpha$ kan dus toegepast worden t.o.v. punt k.



$$\Rightarrow G\sin 30.R - F.2R = I_k.\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{m.g.R}{2} - 2RF = \frac{3mR^2}{2}.\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{500.0{,}2}{2} - 2.0{,}2.100 = \frac{3.50.0{,}2^2}{2}.\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 3{,}33\frac{r}{s^2}$$

geval b

Het vat ondergaat een ogenblikkelijke rotatie rond k terwijl het bier enkel transleert. Het translatie en rotatie evenwicht van het geheel, leveren:

$S.R - F.R = I_v.\alpha$ (1)

$G\sin 30 - S - F = m.a$ (2)

De derde vergelijking is een verband tussen versnellingen:

$R.\alpha = a$ (3)

(3) in (2) levert:

$S = G\sin 30 - F - m.R.\alpha$ (4)

(4) in (1) levert:

$$(G\sin 30 - F - m.R.\alpha).R - F.R = I_v.\alpha$$

$$\Rightarrow G\sin 30.R - 2F.R = m.R^2.\alpha.+I_v.\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{500}{2}.0{,}2 - 2.100.0{,}2 = 50.0{,}2^2.\alpha + 20.0{,}2^2.\alpha$$

$$\Rightarrow 50 - 40 = 2{,}8.\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 3{,}57\frac{r}{s^2}$$

7.3 Hijswerktuig

Oplossing:

De kracht F moet constant zijn. Dus is ook de versnelling constant.

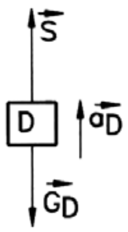
$$\Delta s = \frac{1}{2}.a.\Delta t^2$$

$$\Rightarrow a_D = \frac{2.\Delta s}{\Delta t^2} = 1\frac{m}{s^2}$$

De kracht F moet zodanig zijn dat D een versnelling van $1\frac{m}{s^2}$ ondergaat.

Het verticaal evenwicht van blok D levert:

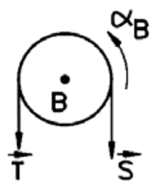
$$S = m_D.g + m_D.a_D = 55N$$



Het rotatie evenwicht van schijf B levert:

$$T.R_B - S.R_B = I_B.\alpha_B$$

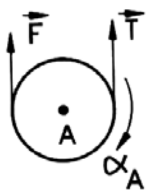
$$\Rightarrow T = \frac{S.R_B + I_B\frac{a_D}{R_B}}{R_B} = 55 + I_B\frac{a_D}{R_B^2} = 55 + \frac{4}{2} = 57N$$



Voor schijf A:

$$F.R_A - T.R_A = I_A.\alpha_A$$

$$\Rightarrow F = 57 + 3 = 60N$$



7.4 Botsing van 2 auto's

Oplossing:

$F = m.a_C$

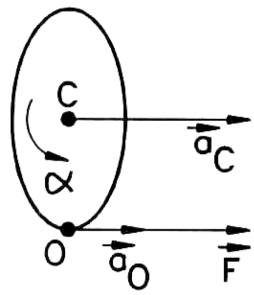
$F.\left|OC\right| = I_C.\alpha$

$a_O = a_C + \left|OC\right|.\alpha$

Oplossen van dit stelsel levert:

$\alpha = 95{,}9\dfrac{r}{s^2}$

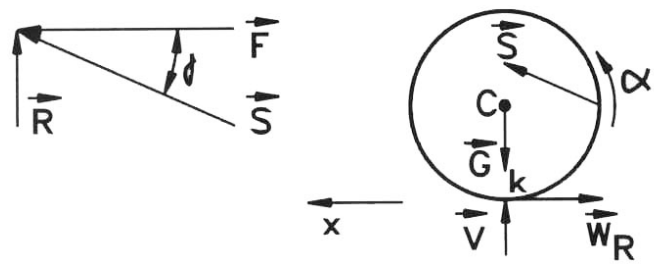
Dit is meer dan 15t/s (wat dodelijk is)



7.5 Cilinder op een horizontaal vlak

Oplossing:
Bereken eerst de kracht S in de staaf.
Een staaf kan enkel langskrachten opnemen, zodat

$$S.\cos\gamma = F \Rightarrow S = \frac{F}{\cos\gamma} = \frac{F}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}} = \frac{30}{\sqrt{1-0{,}09}} = 31{,}45\text{N}$$



Het is nu mogelijk de cilinder vrij te maken. Het verticaal evenwicht levert:

$V + S\sin\gamma - G = 0$

$\Rightarrow V = G - S\sin\gamma = 60 - 31{,}45.0{,}3 = 50{,}56\text{N}$

Het horizontaal evenwicht levert:

$S\cos\gamma - W_R = m_{cil}.a_{cx}$

Verband tussen versnellingen:

$a_{cx} = a_{kx} + \alpha.R_{cil}$

Rotatie evenwicht:

$W_R.R_{cil} + S\sin\gamma.R_{cil} = I_c.\alpha$

Uit de opgave blijkt rollen zonder glijden, dus $a_{kx} = 0$.
Er wordt gevraagd naar de overgang tussen rollen en rollen met glijden. Bijgevolg is $W_R = W_{R,max} = f.V$

Het op te lossen stelsel vergelijkingen wordt dus:

$S\cos\gamma - f.V = m_{cil}.a_{cx}$

$a_{cx} = \alpha.R_{cil}$

$f.V.R_{cil} + S\sin\gamma.R_{cil} = I_c.\alpha$

Invullen van de bekende waarden levert:

$31{,}45.0{,}95 - f.50{,}56 = 6.a_{cx}$

$a_{cx} = 0{,}3.\alpha$

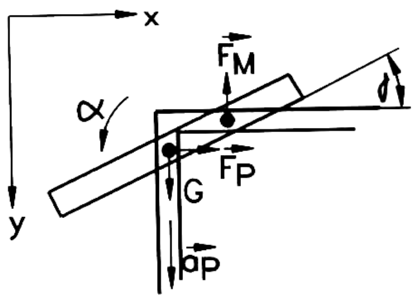
$$f.50{,}56.0{,}3 + 31{,}45.0{,}3.0{,}3 = 6.\frac{0{,}3^2}{2}.\alpha$$

Dit is een stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden.
Oplossen levert de waarde van de minimaal vereiste wrijvingscoëfficiënt: 0,073.

7.6 Staaf geleid door pinnen in een gleuf

Oplossing:

De kracht die de gleuf uitoefent op de staaf in M is verticaal.
Het punt P blijft in de verticale gleuf en kan dus alleen verticaal naar beneden versnellen.



Het verticaal evenwicht levert bijgevolg:

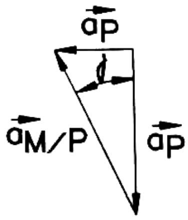
$G - F_M = m.a_P$

Het rotatie evenwicht levert:

$F_M.\cos\gamma.\frac{L}{4} = I.\alpha$

Voor een gegeven stand, betekent dit 2 vergelijkingen in de onbekenden F_M, a_P, α.

Er bestaat echter een verband tussen a_P en α.



$\vec{a}_M = \vec{a}_P + \vec{a}_{M/P}$

$\Rightarrow a_P = \alpha.\frac{L}{4}.\cos\gamma$

Het stelsel op te lossen vergelijkingen wordt dus:

$10 - F_M = \alpha.0{,}25.\cos\gamma$

$F_M.\cos\gamma.0{,}25 = \frac{1}{12}.\alpha$

a) In geval $\gamma = 0$ is de oplossing van het stelsel: $\alpha = \frac{120}{7}\frac{r}{s^2}$

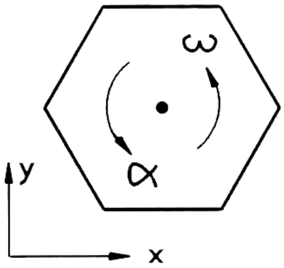
$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$

Waaruit: $a_{Ax} = 0 m/s^2$, $a_{Ay} = 12{,}86 m/s^2$

b) In geval $\gamma = 45^o$ is de oplossing: $\alpha = 31\frac{r}{s^2}$, $a_{Ax} = 5{,}45 m/s^2$, $a_{Ay} = 8{,}18 m/s^2$

7.7 Zeshoekige plaat

Oplossing:



$$\vec{a}_D = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \wedge \vec{OD} + \omega^2 \vec{DO}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \wedge \vec{OA} + \omega^2 \vec{AO}$$

Deze 2 vectoriële vergelijkingen kunnen geprojecteerd worden op 2 onderling loodrechte richtingen:

$$-0{,}5 = a_{o,x} + 0{,}1.\alpha.\cos 30 - 0{,}1.\omega^2.\sin 30$$

$$0 = a_{o,y} + 0{,}1.\alpha.\sin 30 + 0{,}1.\omega^2.\cos 30$$

$$-0{,}4.\sin 30 = a_{o,x} - 0{,}1.\alpha.\cos 30 + 0{,}1.\omega^2.\sin 30$$

$$-0{,}4.\cos 30 = a_{o,y} - 0{,}1.\alpha.\sin 30 - 0{,}1.\omega^2.\cos 30$$

Dit is een stelsel van 4 vergelijkingen in 4 onbekenden.
Het volstaat de eerste en de derde vergelijking op te tellen om te vinden dat

$$a_{o,x} = -0{,}35 \frac{m}{s^2}$$

Uit de tweede en de vierde vergelijking volgt: $a_{o,y} = -0{,}173 \frac{m}{s^2}$

Hieruit berekent men:

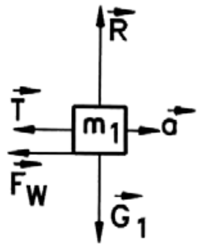
$$F_{o,x} = 10.a_{o,x} = -3{,}5N$$

$$F_{o,y} = 10.a_{o,y} = -1{,}73N$$

7.8 Hefwerktuig

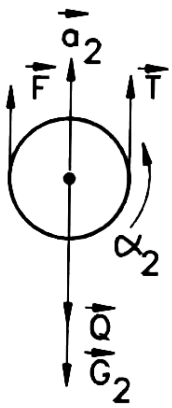
Oplossing:

Vrijmaken van m_1 en uitschrijven van het verticaal evenwicht, levert:
$F.\sin45 + R - G_1 = 0$
Waaruit: R=100N
De maximale wrijving is dus 10N
In vergelijking met de massa's aan het touw, is dit weinig.
Veronderstel daarom dat m_1 naar rechts beweegt.
Het horizontaal evenwicht:
$-T+F.\sin45 - F_w = m_1.a$
of
$T = 90 - 20a$



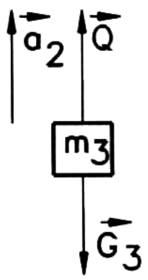
Verticaal evenwicht van m_2 levert:
$-Q - G_2 + T + S = m_2.a_2$
of
$S+T = Q+80+8a_2$

Rotatie evenwicht van m_2 levert:
$0{,}1.T - 0{,}1.S = 0{,}5.8.0{,}1^2.\alpha_2$
of
$T-S = 0{,}4.\alpha_2$



Verticaal evenwicht van m_3 levert:
$Q - G_3 = m_3.a_2$
of
$Q = 2.a_2+20$

De 2 ontbrekende verbanden tussen onbekenden zijn:
$a_2 = a/2$
$0{,}2.\ \alpha_2 = a$

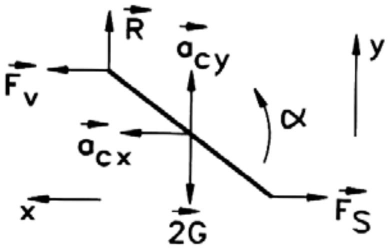


Het op te lossen stelsel is dus:
$T = 90 - 20a$
$S+T = Q+80+8a_2$
$T-S = 0{,}4.\alpha_2$
$Q = 2.a_2+20$
$a_2 = a/2$
$0{,}2.\ \alpha_2 = a$

Oplossen levert: $a = 1{,}702 m/s^2$ naar rechts gericht.
Vergelijken van T en F leert dat de gemaakte veronderstelling juist was.

7.9 Verende staafconstructie

Maak eerst de linker staaf vrij, schrijf het krachten evenwicht en het momenten evenwicht.



$$F_V - F_S = 2m.a_{cx}$$

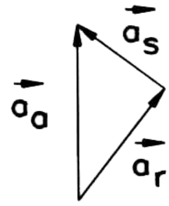
$$R - 2G = 2m.a_{cy}$$

$$F_V.l.\frac{\sqrt{2}}{4} + F_S.l.\frac{\sqrt{2}}{4} - R.l.\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{ml^2}{12}.\alpha$$

Dit zijn 3 vergelijkingen met 6 onbekenden.

Het evenwicht van de veer levert de vierde vergelijking:

$$F_V = k.(l - l\cos 45) = 1000 - 500.\sqrt{2}$$



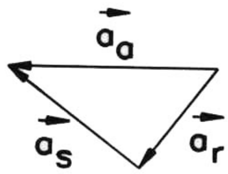
De beweging van A levert een 5de vergelijking.
De absolute versnelling van A is verticaal omhoog
De relatieve versnelling van A t.o.v. C is haaks op CA :

$$a_r = \frac{1}{2}\alpha \Rightarrow a_{r,x} = -\frac{1}{2}\alpha.\cos 45$$

De sleepversnelling in de x richting is hieraan tegengesteld; waaruit:

$$a_{c,x} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$$

De beweging van B levert de 6de vergelijking: $a_{c,y} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{4}$



Oplossen van dit stelsel levert:

$$\alpha = 2400\frac{r}{s^2}$$

$$a_{c,x} = 848\frac{m}{s^2}$$

$$a_{c,y} = 848\frac{m}{s^2}$$

$$a_A = 1696\frac{m}{s^2}$$

Impulsmoment

8.1 Koppeling van 2 rotoren

Oplossing:

$$I_1\omega_0 = I_1\omega_1 + I_2\omega_1$$
$$\Rightarrow 10.1{,}5 = (10+5)\omega_1$$
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1r}{s}$$

8.2 Roterende staaf

Oplossing:
Het geheel wordt niet aangedreven, waardoor het impulsmoment niet kan veranderen.
Vlak voor de lasbreuk geldt:

$$L = I_{st}.\omega_0 + I_m.\omega_0$$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{M.l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2\right).\omega_0 + m.l^2.\omega_0$$

$$\Rightarrow L = \frac{M.l^2}{3}.\omega_0 + m.l^2.\omega_0$$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{M}{3} + m\right).l^2.\omega_0$$

Vlak na de lasbreuk geldt:

$$L = I_{st}.\omega_1 + \left|\vec{r}\, x m.\vec{v}\right|$$

$$\Rightarrow L = I_{st}.\omega_1 + l.m.l.\omega_1$$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{M}{3} + m\right).l^2.\omega_1$$

Hieruit volgt:
$\omega_1 = \omega_0$

8.3 Kermismolen

Oplossing:

$$I_{molen}\omega_0 = (I_{molen} + I_{man}).\omega_1$$
$$\frac{500.9}{2}\omega_0 = (\frac{500.9}{2} + 60.2{,}5^2).\omega_1$$
$$2250.n_0 = (2250 + 375).n_1$$
$$n_1 = \frac{2250.5}{2250 + 375} = 4{,}28\frac{t}{min}$$

8.4 Draaimolen

Oplossing:

$$I_{begin}\omega_{begin} = I_{eind}\omega_{eind}$$
$$\Leftrightarrow I_{begin}n_{begin} = I_{eind}n_{eind}$$
$$\Leftrightarrow (1000 + 30.2,2^2).4 = (1000 + 30).n_{eind}$$
$$\Leftrightarrow n_{eind} = 4,447t / min$$

8.5 Satelliet met zonnecellen

Oplossing:

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1$$
$$I_0 = I_{0C} + 2.I_{0P} = 50 + 2(\frac{10}{12} + 10) = 50 + \frac{260}{12} = 71,7$$
$$I_1 = I_{0C} + 2.I_{1P} = 50 + 2(\frac{10.5}{12} + 10.4) = 138$$
$$\Rightarrow 71,7.3 = 138.\omega_1$$
$$\Rightarrow \omega_1 = 1,55\frac{r}{s}$$

8.6 Valhamer

Oplossing:

Veronderstel dat de massa C na de botsing roteert in tegenwijzerzin. Voor de rotatie as door O geldt:

$$L_1 - L_0 = M.\Delta t$$
$$\Leftrightarrow I_0.\omega_1 + I_0.\omega_0 = F.\Delta t.|OC|$$

met F de kracht die C uitoefent op D en omgekeerd.

Anderzijds geldt voor de massa D: (vermits de botsingsduur oneindig kort is en de arbeid van het gewicht verwaarloosbaar)

$$F.\Delta t = m_D.v_D = 5000.0,5 = 2500\frac{kg.m}{s} = 2500Ns$$

Dit levert:

$$I_0.\omega_1 + I_0.\omega_0 = 2500.|OC|$$

met

$$I_0 = I_{0staaf} + I_{0C} = \frac{m_s.l^2}{12} + m_s.(\frac{l}{2})^2 + m_C.l^2$$
$$I_0 = 20.\frac{36}{12} + 20.\frac{36}{4} + 200.36 = 7440kgm^2$$

Waaruit

$$7440(\omega_1 + \omega_0) = 2500.6$$
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1500}{7440} - 30 = -27,98\frac{r}{s}$$

De hoeksnelheid van OC blijft in wijzerzin en vermindert nauwelijks door de botsing.

Energie van vlakke beweging van lichamen

9.1 Cilinder op een horizontaal vlak

Oplossing: Het komt erop aan de afgelegde weg van de kracht F te berekenen. Tussen begintoestand en eindtoestand is de cilinder opgeschoven over een afstand Δs_1 Tegelijk is F bijkomend verschoven over een afstand Δs_2 doordat het scharnierpunt naar boven is gekanteld.

$\Delta s_1 = \dfrac{\pi R}{2} = 0{,}471\text{m}$

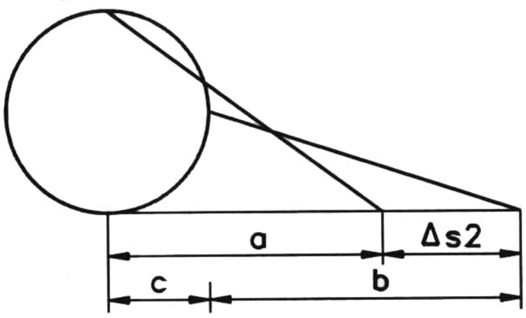
$\Delta s_2 = b + c - a$

met $a = \sqrt{1^2 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

$b = \sqrt{1^2 - 0{,}3^2} = 0{,}95$

$c = 0{,}3$

waaruit: $\Delta s_2 = 0{,}45\text{m}$



De arbeid geleverd door F is: $W_F = 0{,}921\text{x}30 = 27{,}63\text{J}$

Deze arbeid wordt omgezet in kinetische en potentiële energie.

$V = m.g.\Delta h = 2.10.0{,}15 = 3\text{J}$

$E_k = \dfrac{1}{2} I_k \omega_k^2 + \dfrac{1}{2} m_s v_s^2$

$I_k = \dfrac{3}{2} m_{cil} R^2 = \dfrac{3}{2}.6.0{,}3^2 = 0{,}81$

$\Rightarrow E_k = \dfrac{1}{2}.0{,}81.\omega_k^2 + \dfrac{1}{2}.2.(0{,}6.\omega_k)^2 = 0{,}765\omega_k^2$

$\Rightarrow 0{,}765\omega_k^2 + 3 = 27{,}63$

De hoeksnelheid is 5,67r/s.

9.2 Hijswerktuig

Oplossing: De constante kracht in C levert arbeid die wordt omgezet in kinetische en potentiële energie.
Voor het berekenen van de kinetische energie, wordt eerst de eindsnelheid bepaald.

$$a_D = 1\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow v_D = 3\frac{m}{s}$$

$$E_k = E_{k,A} + E_{k,B} + E_{k,D}$$

$$E_{k,D} = \frac{1}{2} m_D . v_D^2 = \frac{1}{2} 5.9 = 22{,}5J$$

$$E_{k,B} = \frac{1}{2} I_B . \omega_B^2 = \frac{1}{2} . \frac{m_B . R_B^2}{2} . \frac{v_D^2}{R_B^2} = \frac{1}{4} .4.9 = 9J$$

$$E_{k,A} = \frac{1}{2} I_A . \omega_A^2 = \frac{1}{2} . \frac{m_A . R_A^2}{2} . \frac{v_D^2}{R_A^2} = \frac{1}{4} .6.9 = 13{,}5J$$

$$E_k = 13{,}5 + 9 + 22{,}5 = 45J$$

$$V = m_D . g . h = 5.10.4{,}5 = 225J$$

De aanwezige energie is dus 270J

$$F = \frac{\text{Energie}}{\Delta s} = \frac{270}{4{,}5} = 60N$$

9.3 Haspel

Oplossing: De energie die door de motor verbruikt is, is omgezet in kinetische energie.

$$E_k = \frac{m_k.v_k^2}{2} + \frac{m_c.v_c^2}{2} + \frac{I_c.\omega^2}{2}$$ met c voor cilinder en k voor kar

Nu is: $v_c = 3 - v_k$

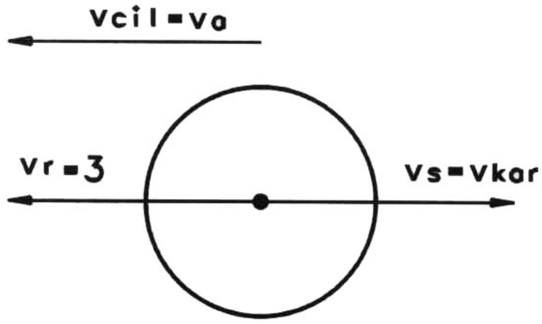
$$r_c.\omega_c = 3 \Rightarrow \omega_c = \frac{3}{0,25} = 12$$

$$m_c.v_c = m_k.v_k \Rightarrow 50.(3 - v_k) = 100.v_k \Rightarrow v_k = 1m/s$$

$$I_c = \frac{1}{2}50.0,25^2 = 1,5625$$

Waaruit: $v_c = 3 - 1 = 2m/s$

$$E_k = \frac{100}{2} + \frac{50.4}{2} + \frac{1,5625.12^2}{2} = 50 + 100 + 112,5 = 262,5J$$



9.4 Rollende staaf

Oplossing: Het systeem is onderworpen aan de zwaartekracht, reactiekrachten en wrijving. De reactiekrachten en de wrijving leveren in dit geval geen arbeid. De wet van behoud van energie is dus toepasbaar:

toestand 0: $V = m_B.g.h$

$$\Rightarrow V = 250.10.(|MN|\sin 75 - |MN|\sin 45)$$

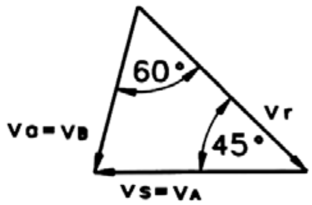
$$\Rightarrow V = 2500.2(\sin 75 - \sin 45) = 1294 J$$

toestand 1: $E_k = \dfrac{m_A.v_A^2}{2} + \dfrac{I_A.\omega_A{}^2}{2} + \dfrac{m_B.v_B^2}{2} + \dfrac{I_B.\omega_B{}^2}{2}$

met: $\dfrac{I_A.\omega_A{}^2}{2} = \dfrac{m_A.r_A^2.v_A^2}{2.2.r_A^2} = \dfrac{m_A.v_A^2}{4}$

$$\frac{I_B.\omega_B{}^2}{2} = \frac{m_B.v_B^2}{4}$$

waaruit: $E_k = \dfrac{3m_A.v_A^2}{4} + \dfrac{3m_B.v_B^2}{4}$



Rest nog een verband te zoeken tussen v_A en v_B.

De snelheid van B kan beschouwd worden als de snelheid van A en een rotatie rond A.
De sinusregel toegepast op de figuur, levert:

$$\frac{v_B}{\sin 45} = \frac{v_A}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow v_B = v_A \frac{\sin 45}{\sin 60} = 0{,}816.v_A$$

Dit levert:

$$E_k = \frac{3.250.v_A^2}{4} + \frac{3.0{,}816^2.v_A^2}{4} = 312{,}3.v_A^2$$

Behoud van energie:

$$1294 = 312{,}3.v_A^2$$

$$\Rightarrow v_A = 2{,}035 \frac{m}{s}$$

9.5 Halve cilinder

Oplossing:

$$V_0 + E_{k0} = V_1 + E_{k1}$$

$$V_0 = m.g.R$$

$$V_1 = m.g.\frac{4}{7}R$$

$$E_{k0} = 0$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}I_k.\omega_k^2 = \frac{1}{2}(I_C + m.(\frac{4R}{7})^2).\omega_k^2$$

$$\Rightarrow m.g.R = \frac{4}{7}.m.g.R + \frac{1}{2}(0,32mR^2 + m.(\frac{4R}{7})^2).\omega_k^2$$

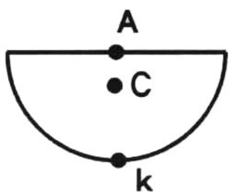
$$\Rightarrow g = \frac{4}{7}.g + \frac{1}{2}(0,32R + \frac{16}{49}R).\omega_k^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{7}.g = 0,323.R.\omega_k^2$$

$$\Rightarrow \omega_k = \sqrt{\frac{30}{7.0,323R}} = \sqrt{\frac{13,3}{R}}$$

Opmerking:

De ligging van het massacentrum is opgezocht in tabellen.



Deze ligging kan ook berekend worden uit

$$\int y.dm = y_C.M$$

Een andere manier van berekenen is als volgt:

$I_A = 0,5.M.R^2$ (de helft van het traagheidsmoment van een volle cilinder)

$$I_C = I_A - M.|AC|^2$$

$$\Rightarrow 0,32MR^2 = 0,5.M.R^2 - M.|AC|^2$$

$$\Rightarrow 0,18.R^2 = |AC|^2$$