Complexe getallen

Imaginaire getallen

$$j^2 = -1$$

Complexe getallen

$z = a + jb$ $\qquad \mathbb{C} = \{z \mid z = a + jb \text{ en } a, b \in \mathbb{R}\}$

Gelijkheid van complexe getallen

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Complex toegevoegde

$z = a + bj \qquad \bar{z} = a - bj$

als $z = \bar{z}$ dan $z \in \mathbb{R}$ $\qquad z = \bar{\bar{z}}$

$\bar{z}$ gespiegeld t.o.v. reële as.

$a_1 = a_1$
$b_1 \neq b_2$ maar $b_1 = -b_2$

Hoofdstuk 2 : Matrices en Determinanten

Defenities

$m \times n$ matrix : element a_{ik} : rij i, kolom k

vierkante matrix : $m = n$

een rijmatrix : $m = 1$ of rijvector

een kolommatrix: $n = 1$ of kolomvector

De getransponeerde : A^T door rijen & kolommen te wisselen

$m \times n \rightarrow n \times m$

$(A^T)^T = A$

Vierkante matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

hoofddiagonaal

nevendiagonaal

A^T = gespiegeld tov de hoofddiagonaal

bovendriehoeksmatrix : alle elementen onder hoofdd. = 0

onderdriehoeksmatrix : alle elementen boven hoofdd. = 0

een symmetrische matrix : $A^T = A$

scheefsymmetrische matrix : $A^T = -A$

↳ diagonaalelementen = 0

diagonaalmatrix : alle nt-diagonaal elementen = 0

de eenheidsmatrix : diagonaalmatrix waarvan alle diagonaalelementen = 0

voorgesteld E of E_n

Optellen van matrices

Moet van hetzelfde type (m,n) zijn

$A = [a_{ik}]$ en $B = [b_{ik}]$

$C = A + B = [a_{ik} + b_{ik}]$

De scalaire vermenigvuldiging

$\lambda A = [\lambda a_{ik}]$

Bijzonder geval: $\lambda = -1$: $-A = [-a_{ik}]$

... is associatief $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A$

distributief $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Vermenigvuldigen van matrices

aantal kolommen 1ste matrix = aantal rijen 2de matrix

⇒ een matrix aantal rijen vd 1ste matrix x aantal kolommen vd 2de matrix

$$\underset{(m,n)}{A} . \underset{(n,p)}{B} = [a_{ij}][b_{jk}] = \underset{(m,p)}{[c_{ik}]}$$

vb.
$$\underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}} . \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$1.2 + 2.4 + 3.-3 = 1$

$1.1 + 2.-1 + 3.5 = 14$

...

Eigenschappen vd vermenigvuldiging:

$(AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$EA = AE = A$ (opletten andere orde : EA dan AE)

$(AB)^T = B^T . A^T$

$AB \neq BA$

nuldelers : $AC = BC \Rightarrow$ nt noodzakelijk $A = B$

want

$(A-B)C = 0 \Rightarrow$ A-B kan nuldeler zijn van 4

idempotente matrix : A idempotent $\Leftrightarrow A^2 = A$

nilpotent : A^p = nulmatrix met p kleinst getal

index

commuterende matrices : $A.B = BA$

Determinanten van een vierkante matrix

Det. van een 2 × 2 matrix

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Eigenschappen:

- $\det A^T = \det A$
- rijen of kolommen verwisselen → veranderen teken

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

de alternerings-eigenschap

- een rij / kolom vermenigvuldigen met een scalair
  → det $\overline{w}$ met scalair vermenigvuldigd

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- de det. is nul als:
  - nulrij / kolom bevat $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
  - rijen / kolommen aan elkaar gelijk zijn $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$
  - of evenredig zijn aan elkaar $\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix}$

- de det. verandert $\overline{nt}$ wanneer we bij een rij, een veelvoud van de andere rij optellen.

- $\det(A.B) = \det A \,.\, \det B$
  → $A.B \neq B.A$ hun det. wel

- driehoeksmatrix : det.A = product diagonaalelementen
- det $E = 1$
- det nulmatrix $= 0$

Det. van een 3 x 3 matrix

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Regel van Sarrus eigenlijk alleen de 2 eerste kolomen, nog eens bijplaatsen

methode van Laplace:

- minor M_{ik} van a_{ik}
  = de matrix die men overhoudt als je i en k wegschrapt
- cofactor A_{ik} van a_{ik}

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \det M_{ik}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_{ik} \quad : \text{ontwikkeling naar rij } i$$

$$\ldots\ldots = \sum_{i=1}^{3} \ldots\ldots \quad : \text{ontwikkeling naar kolom } k$$

Determinant ve $n \times n$ matrix

ontwikkelen naar een rij of kolom:

det van orde $n-1$, verder ontwikkelen

tot van orde 2×2

Eigenschappen:

. zie 2×2 matrices

. elementaire bewerkingen:

- gem. factor van rij / kolom voorop plaatsen
- 2 rijen / kolommen van plaats verwisselen en minteken
- veelvoud ve andere rij optellen

Reguliere & singuliere vierkante matrices

Reguliere matrix: $\det A \neq 0$

Singuliere matrix: $\det A = 0$

zie opmerkingen pwo

De inverse ve vierkante matrix

De matrix X waarvoor geldt: $AX = XA = E$ comm.

notatie: A^{-1} zie pwo aantonen A^{-1} uniek

de matrix moet regulier zijn! A^{-1} bestaat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{A^{T}}_{\text{cofactor}}$$

!!! grote A dus matrix van cofactoren

notatie: adj A

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}^{T}$$

voor 2 x 2 matrix:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Rekenregels voor de inverse:

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ omdraaien !!

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

De rang van een matrix

uit (rechthoekige) matrix → vierkante matrices

deze met de grootste orde & det $\neq 0$

= oorspronkelijke matrix   notatie: $RgA = r$

- elementaire bewerkingen ✓

Echelonvorm ve matrix

in m x n matrix

Eigenschappen:

- m − r nulrijen onderaan
- r rijen met minstens 1 nt nulelement bovenaan
- 1ste nt nulelement op een rij = leider
  leider ve rij, steeds links vd leider vd volgende rij
- rang = aantal nt nulrijen
- echelonvorm is (meestal) nt uniek

Reg. matrix : boven driehoeksmatrix
Sing. matrix : + met nulrijen

Opm: uitvoeren elementaire rijbewerkingen
= links vermenigvuldigen met de E-matrix
uitgevoerde rijbewerking ↲