

H19: Differentiaalvergelijkingen van eerste orde

DV van de 1ste orde: oplossingen

- Algemene oplossing
 - Alle oplossingen voor een vergelijking met evenveel constanten als de orde van de vergelijking
- Particuliere oplossing
 - De bijkomende voorwaarde wordt **beginvoorwaarde** of **randvoorwaarde** genoemd. Waaruit je C kan berekenen.
- (Singuliere oplossing)

De **integraalkromme** stelt de algemene oplossing van een familie krommen voor.

Separabele differentiaalvergelijkingen

$$y' = f(x) * g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$= F(x) + C$$

Zie Toepassingen 19-5 tot 19-11

Vergelijkingen die herleid kunnen worden naar separabele DV

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Men substitueert

$$u = \frac{y}{x}$$

Waaruit volgt:

$$y' = u + x \frac{du}{dx}$$

$$f(u) = u + xu'$$

$$y' = f(ax + by + c)$$

Men substitueert

$$u = ax + by + c$$

Afleiden naar x:

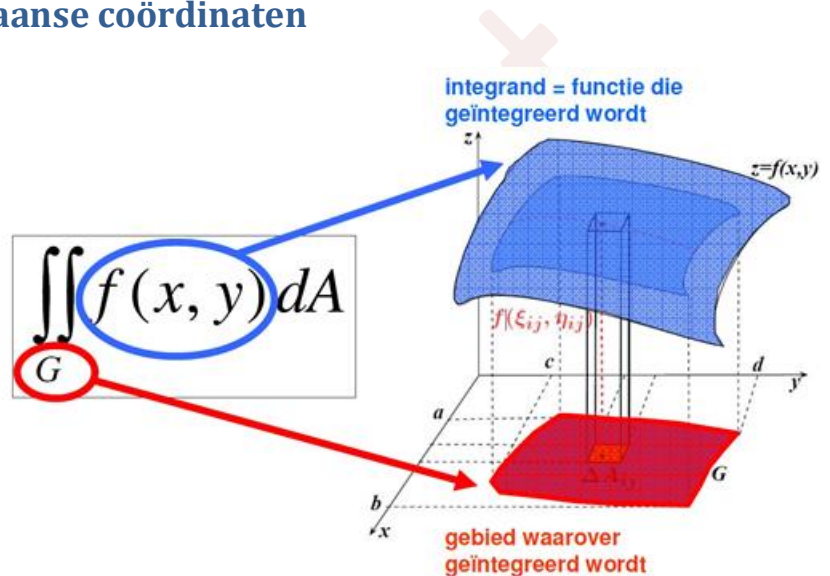
$$u' = a + by'$$

$$u' = a + b f(u)$$

H27: Dubbelintegraal van een functie van twee veranderlijken over een vlak gebied.

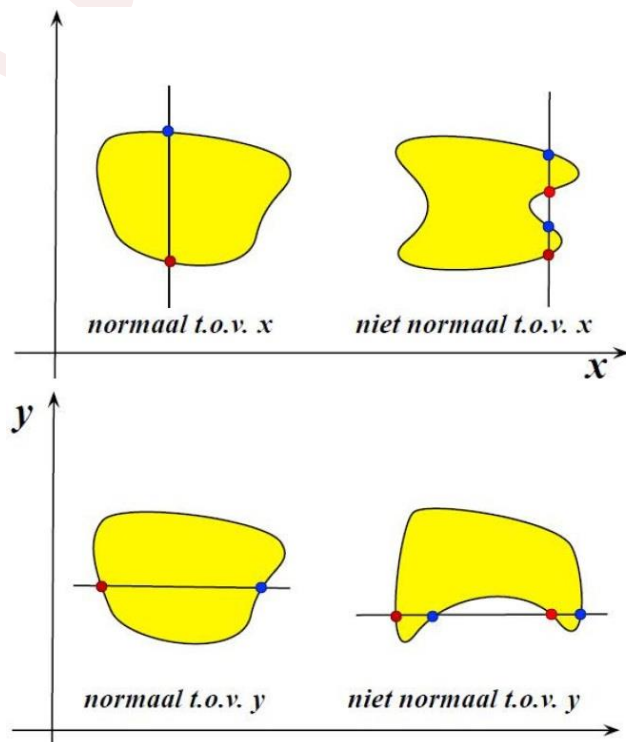
Dubbelintegraal in cartesiaanse coördinaten

Volume van "cilindrisch" lichaam met **grondvlak** G en met "Boven" vlak het oppervlak $z = f(x, y)$.



$$\iint_G f(x, y) dA$$

Stelling van Fubini (dubbelintegraal) is enkel geldig voor normale integratiegebieden G . Elke verticale (horizontale) heeft hoogstens 2 snijpunten met de rand van G .

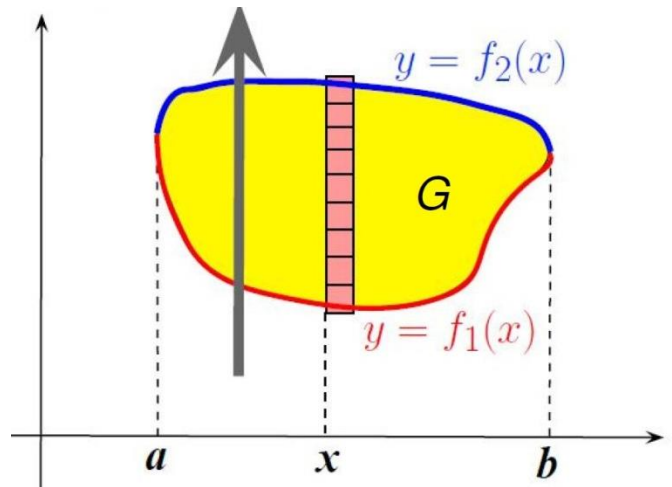


Dubbelintegraal: praktische berekening

1^{ste} integratie volgorde: van onder naar boven

We integreren eerst naar y bij vaste x , dan naar x .

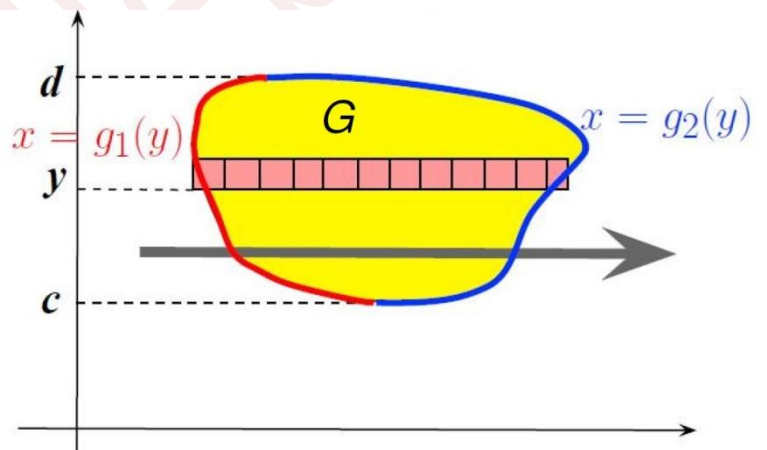
$$\iint_G f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



2^{de} integratie volgorde: van links naar rechts

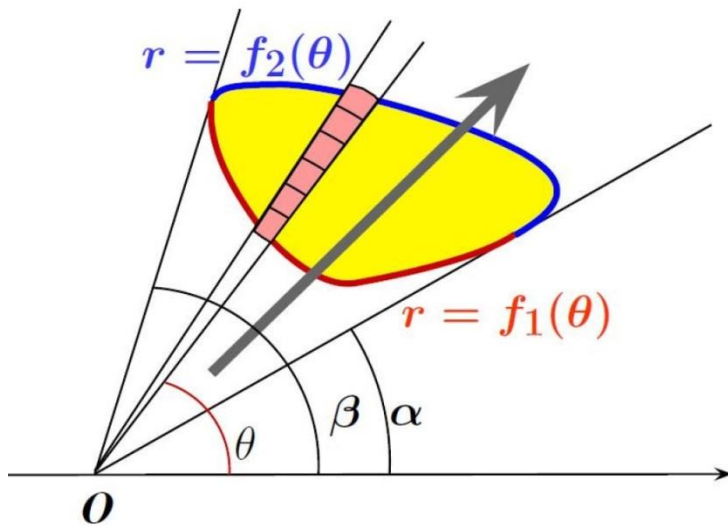
We integreren naar x bij vaste y , dan naar y .

$$\iint_G f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

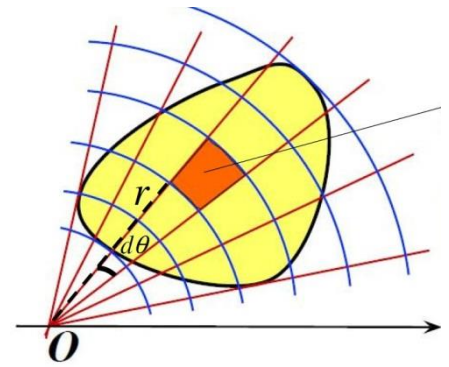


Dubbelintegraal in poolcoördinaten

$$dA = r * d\theta * dr$$



$$\iint_G f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr \right) d\vartheta$$



H29 (deel)

Toepassingen

Oppervlakte van een vlak gebied G

$$\iint_G 1 \cdot dA$$

Massa van een vlak gebied

$$m = \iint_G dm = \iint_G \rho(x, y) dA$$

Massamiddelpunt (zwaartepunt) van een vlak gebied

$$x_M = \frac{\iint_G x \rho(x, y) dA}{\iint_G \rho(x, y) dA} \quad y_M = \frac{\iint_G y \rho(x, y) dA}{\iint_G \rho(x, y) dA}$$

Traagheidsmoment t.o.v. een as

$$I_d = m \cdot l^2$$

$$I_d = \iint_G l^2 dm = \iint_G l^2 \rho(x, y) dA$$

$$I_x = \iint_G y^2 \rho(x, y) dA \quad I_y = \iint_G x^2 \rho(x, y) dA$$

Stelling evenwijdige assen

$$I_d = I_{d0} + Ma^2$$

Massa M en loodrecht afstand a

Gemiddelde waarde van een functie over een gebied

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\langle f(x,y) \rangle = \frac{1}{\text{opp } G} \iint_G f(x,y) dA$$

H20: Lineaire DV van 1^{ste} orde

Structuur van de algemene oplossing

lineair als $y' = A + By$

met A en B functies van x alleen

standaardgedaante:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

← storingsfunctie

wanneer: $g(x) = 0$

DV gereduceerd / homogeen

$g(x) \neq 0$

DV niet gereduceerd / niet-homogeen

$f(x) = a$

een lineaire eerste orde DV met constante coëfficiënt

STELLING:

Zij $y' + f(x)y = g(x)$ een lineaire eerste orde DV.

Iedere oplossing y is te schrijven als de som van y_g en y_p . Waarbij y_g de algemene oplossing is (

gereduceerde DV) en y_p een particuliere oplossing.

$$y = y_g + y_p$$

Oplossing van de gereduceerde lineaire DV

Kan gevonden worden door scheiding van de veranderlijken. (separabel)

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -f(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int f(x)dx + \ln C$$

$$\ln \frac{|y|}{C} = -\int f(x)dx$$

$$y_g = K e^{-\int f(x)dx} \text{ met } K = \pm C$$

met constante coëfficiënt:

$$y_g = K e^{-ax}$$

Gilles Callebaut

De lineaire DV van de eerste orde bepalen

Methode A:

Variatie van de constante

we vertrekken van de A.O. , we vervangen de integratieconstante door de functie $K(x)$.

We gaan na of $y = K(x) e^{-\int f(x)dx}$ een oplossing kan zijn van de niet-gereduceerde DV.

$$y = K(x) e^{-\int f(x)dx}$$

$$y' = K'(x)e^{-\int f(x)dx} - K(x)f(x) e^{-\int f(x)dx}$$

substitutie van de uitdrukkingen in de DV:

$$K'(x)e^{-\int f(x)dx} - K(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + f(x)K(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

$$K'(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

$$K(x) = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx$$

we besluiten dat :

$$y_p = e^{-\int f(x)dx} * \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx$$

De algemene oplossing van de niet-gereduceerde lineaire DV van de 1^{ste} orde:

$$y = y_g + y_p$$

$$y = K e^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx} * \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx$$

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[K + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \right]$$

Voorspellen

ALLEEN voor DV met CONSTANTE COËFFICIËNT !!!

De gedaante van y_p is voorspelbaar, als dezelfde vorm als $g(x)$ eventueel met toevoeging van factor x om te voorkomen dat y_p een term bevat die ook voorkomt in y_g .

Storingslid	Voorspelde y_p
Veeltermfunctie $p_n(x)$	Veeltermfunctie $q_n(x)$
$C \sin \omega x$ of $C \cos \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$C e^{mx}$ met $m \neq -a$	$A e^{mx}$
$C e^{mx}$ met $m = -a$	$A x e^{mx}$

Methode B:

(staat niet in de cursus vermeld zie PowerPoint voor voorbeelden)

$y = y_g + y_p$ in één keer bepalen.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Stel $\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$ en vermenigvuldig beide leden met deze factor.

$$\mu y' + \mu f(x)y = \mu g(x)$$

$$\text{waarbij } \mu' = \mu f(x)$$

$$(\mu y)' = \mu g(x)$$

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu g(x) dx + K$$

Toepassingen van lineaire DV van de eerste orde

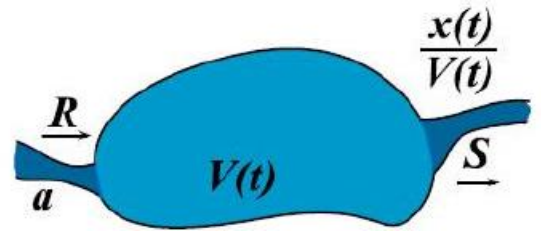
Een milieuvraagstuk

Gevraagd wordt na te gaan hoe de waterkwaliteit in het meer evolueert in de tijd.

Instroom: $a \left[\frac{kg}{l} \right] \cdot R \left[\frac{l}{min} \right] \cdot \Delta t [min]$

Uitstroom: $\frac{x}{V} \left[\frac{kg}{l} \right] \cdot S \left[\frac{l}{min} \right] \cdot \Delta t [min]$

waarbij $\frac{x}{V} \left[\frac{kg}{l} \right]$ de concentratie in het water is dat naar buiten stroomt



balans: $x(t + \Delta t) = x(t) + instroom - uitstroom$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + a \cdot R \cdot \Delta t - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot S \cdot \Delta t$$

$$\frac{x(t + \Delta t)}{x(t)} = a \cdot R - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot S$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t)}{x(t)} = a \cdot R - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot S$$

$$\frac{dx}{dt} = aR - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot S$$

waarin $V(t) = V_0 + (R - S)t$

Zo bekomen we de lineaire DV van de 1^{ste} orde:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{S}{V_0 + (R - S)t} x = aR$$

Bijzonder geval:

Zowel de instroomdebiet als uitstroomdebiet zijn gelijk. ($R = S$)

We bekommen een lineaire eerste orde DV met een **constante coëfficiënt**.

$$\frac{dx}{dt} + \frac{R}{V_0} x = aR$$

$$x_g = K e^{-\frac{R}{V_0} t}$$

Vermist we zitten met een constante term, voorspellen:

We zitten met een storingsfunctie van het type veeltermfunctie van de 0^{de} graad:

$$x_p = A$$

$$0 + \frac{R}{V_0} A = aR$$

$$A = x_p = aV_0$$

$$x(t) = K e^{-\frac{R}{V_0} t} + aV_0$$

Invullen van de beginvoorwaarden nl $x(0) = 0$

$$K = -aV_0$$

Uiteindelijke DV:

$$x(t) = aV_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{V_0} t} \right)$$

De differentiaalvergelijking van Bernoulli

Sommige niet-lineaire DV kunnen door substitutie worden teruggebracht tot een lineaire DV.

Met gedaante: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ met $n \neq 0$ of 1

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}}p(x) = q(x)$$

via substitutie van $z = \frac{1}{y^{n-1}}$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n} \cdot y' = (1-n) \frac{y'}{y^n}$$

dus $\frac{y'}{y^n} = \frac{z}{(1-n)}$

$$z' + (1-n)p(x)z = q(x)$$

Logistische groei

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

omzetten naar een DV van het Bernoulli-type:

$$\frac{dP}{dt} - aP = bP^2$$

$$\frac{1}{P^2} \frac{dP}{dt} - a \frac{1}{P} = -b$$

$$z' + az = b$$

We hebben dus te maken met een Lineaire DV:

$$z_g = Ke^{-at}$$

We mogen z_p voorspellen: Stel $z_p = A$

$$A = z_p = \frac{b}{a}$$

dus

$$\frac{1}{P} = z = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$$

beginvoorwaarde: $P(0) = P_0$

$$K = \frac{1}{P_0} - \frac{b}{a}$$

uiteindelijke DV:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

Gilles Callebaut

H22: Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

Structuur van de algemene oplossing

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$$

Oplossing van de gereduceerde lineaire DV van tweede orde (y_g)

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$$

Belangrijke eigenschap: voor elke 2 oplossingen y_1 en y_2 , ook elke lineaire combinatie een oplossing is, nl $y = C_1y_1 + C_2y_2$, staat bekend als het **lineair superpositieprincipe**.

Als deze 2 oplossingen **lineair onafhankelijk basisoplossingen** zijn dan geldt ook het omgekeerde.

lin. afh. $\Leftrightarrow C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Nagaan door de **determinant van Wronski**:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

We beperken ons tot DV van de tweede orde met **constante coëfficiënten**.

$$y'' + ay' + by = 0$$

we laten ons inspireren door de oplossing bij een DV van de eerste orde, dus door substitutie in de DV toont dat $e^{\lambda x}$ slechts een oplossing kan zijn als λ voldoet aan de volgende bewerking, de **karakteristieke vergelijking**:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

geval 1: twee verschillende reële wortels λ_1 en λ_2

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ en } y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

criterium van de wronskiaan:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x} \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

De A.O. is dus van de vorm: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

geval 2: dubbel getelde wortels $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$y_1 = e^{\lambda x} \text{ en } y_2 = x e^{\lambda x}$$

criterium van de wronskiaan:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & \lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x}) - x e^{\lambda x} \cdot \lambda e^{\lambda x} = e^{(\lambda x)^2} (\lambda x + 1 - \lambda x) \neq 0$$

De A.O. is dus van de vorm: $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

geval 3: twee complex toegevoegde wortels $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ en $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ en } y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

formule van Euler: $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$

$$e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + j \sin \beta x) + e^{\alpha x} (\cos \beta x - j \sin \beta x) = 2e^{\alpha x} (\cos \beta x)$$

en

$$e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + j \sin \beta x) - e^{\alpha x} (\cos \beta x - j \sin \beta x) = 2j e^{\alpha x} (\sin \beta x)$$

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} (\cos \beta x) & e^{\alpha x} (\sin \beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x) - e^{\alpha x} \beta (\sin \beta x) & \alpha e^{\alpha x} (\sin \beta x) + e^{\alpha x} \beta (\cos \beta x) \end{vmatrix}$$
$$= e^{\alpha x} (\cos \beta x) \cdot (\alpha e^{\alpha x} (\sin \beta x) + e^{\alpha x} \beta (\cos \beta x)) - e^{\alpha x} (\sin \beta x) \cdot (\alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x) - e^{\alpha x} \beta (\sin \beta x))$$
$$= e^{2\alpha x} \left((\cos \beta x) \cdot (\alpha (\sin \beta x) + \beta (\cos \beta x)) - (\sin \beta x) \cdot (\alpha (\cos \beta x) - \beta (\sin \beta x)) \right)$$
$$= \beta e^{2\alpha x} (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)$$
$$= \beta e^{2\alpha x}$$

De A.O. is dus van de vorm: $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

voorspellen van de particuliere oplossing (y_p)

Storingslid	Voorspelde y_p
Veeltermfunctie $p_n(x)$ En nul is geen wortel van de kar. vgl.	Veeltermfunctie $q_n(x)$
$C \sin \omega x$ of $C \cos \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$C e^{mx}$ met $m \neq -a$	$A e^{mx}$
$C e^{mx}$ met $m = -a$	$A x e^{mx}$

nog aan te vullen!!!!

H23: De laplacetransformatie

Definitie

$$L \{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Uitgewerkte belangrijke functies zie bijlage

Eigenschappen

Schaalverandering

$$L \{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Eerste verschuivingseigenschap (verschuiving in het t-domein)

(verschuiving naar rechts)

$$L \{f(t-a) \cdot u(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

Tweede verschuivingseigenschap (verschuiving in het s-domein)

$$L \{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

Afgeleide van de laplacegetransformeerde

(niet zo belangrijk)

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = L \{(-1)^n t^n f(t)\}$$

Integraal van de laplacegetransformeerde

(niet zo belangrijk)

$$\int_s^{+\infty} F(x) dx = L \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$$

Laplacegetransformeerde van een afgeleide

$$L \{f'(t)\} = s L \{f(t)\} - f(0^+)$$

$$L \{f''(t)\} = s^2 L \{f(t)\} - sf(0^+) - f'(0^+)$$

De inverse laplacetransformatie

$$L^{-1}\{F(s)\}$$

- Rechtstreeks (basisformules)
- Partiële breuksplitsing
- convolutiestelling

Lineariteitseigenschap

$$L^{-1}\{F(s) + G(s)\} = L^{-1}\{F(s)\} + L^{-1}\{G(s)\}$$

$$L^{-1}\{c \cdot F(s)\} = c \cdot L^{-1}\{F(s)\}$$

Verschuivingseigenschappen

$$L^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a) \cdot u(t - a)$$

Inversie door splitsing in partieelbreuken

Eerste geval: $F(s)$ bezit n verschillende enkelvoudige polen

enkel de toepassing van deze formule moet gekend zijn

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$
$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{T(s)}{N(s)}\right\} = \sum_{i=1}^n K_i L^{-1}\left\{\frac{1}{s - p_i}\right\} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

met $K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)F(s)$

Tweede geval: $F(s)$ bezit meervoudige polen

enkel de toepassing van deze formule moet gekend zijn

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_i} + \frac{K_2}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{K_n}{(s - p_n)^k}$$
$$L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{j=1}^k K_{i,j} e^{p_i t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + L^{-1}\left\{\frac{T(s)}{N(s)}\right\}$$

met $K_{i,1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s - p_i)^k F(s)]$

Opmerking: de coëfficiënten van de partieelbreuken die horen bij complex toegevoegde polen zelf toegevoegd complex zijn.

Inversie door convolutie

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

- het convolutieproduct is commutatief
- 1 is geen neutraal element

$$L \{f * g\} = L \{f\} \cdot L \{g\}$$

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = L^{-1}\{F(s)\} \cdot L^{-1}\{G(s)\} = f(t) * g(t)$$

Oplossen van lineaire DV met beginvoorwaarden d.m.v. de laplacetransformatie

Eerste orde DV

$$y' + ay = f(t)$$

$$L \{f'(t)\} = s L \{f(t)\} - f(0^+) = sY(s) - y(0^+)$$

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s+a} + \frac{y(0)}{s+a}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s+a} \right\} + y(0^+) L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\}$$

$$y(t) = f(t) * e^{-at} + y_0 e^{-at}$$

Tweede orde DV

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

$$L \{f'(t)\} = s L \{f(t)\} - f(0^+) = sY(s) - f(0^+)$$

$$L \{f''(t)\} = s^2 L \{f(t)\} - sf(0^+) - f'(0^+) = s^2 Y(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$s^2 Y(s) - sf(0^+) - f'(0^+) + a[sY(s) - f(0^+)] + bY(s) = F(s)$$

$$s^2 Y(s) + asY(s) + bY(s) = F(s) + (s+a)f(0^+) + f'(0^+)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + y_0 \frac{s+a}{s^2 + as + b} + y'_0 \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2 + as + b} \right\} + \underbrace{y_0 L^{-1} \left\{ \frac{s+a}{s^2 + as + b} \right\} + y'_0 L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + as + b} \right\}}_{y_g}$$

H24: Functies van twee of meer veranderlijken en partiële afgeleiden

Partiële afgeleiden

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \text{rico van raaklijn } t \text{ in } (x_0, y_0, z_0) \text{ aan } K: z = f(x, y_0)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \text{rico van raaklijn } t' \text{ in } (x_0, y_0, z_0) \text{ aan } K': z = f(x_0, y)$$

Raakvlak aan oppervlak

Nu bepalen de raaklijnen t en t' een vlak α , het raakvlak in P aan Σ .

De vectoren:

$$t_1 = \vec{1}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{1}_z \quad \text{en} \quad t_2 = \vec{1}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{1}_z$$

Een normaalvector \vec{n} :

$$\vec{n} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 1 & 0 & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \\ 0 & 1 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{1}_x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{1}_y + \vec{1}_z$$

De vergelijking van het raakvlak α in $P(x_0, y_0, z_0)$ aan $\Sigma : z = f(x, y)$ is daarom:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

De kettingregel voor partiële afgeleiden

$$z = f(x(t), y(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Bijzonder geval van de kettingregel:

$$z = f(x, y(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Partiële afgeleide van tweede orde

stelling van Schwarz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Extrema

Lokale extrema

Als f een lokaal extremum bereikt in (x_0, y_0) dan geldt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0$$

NIET OMGEKEERD!

Als $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0$ dan heet het punt in (x_0, y_0) een **stationair punt** of **kritisch punt**.

Berekenen van de hessiaan:

$$\Delta_{(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \end{vmatrix}$$

We trekken ons besluit op basis van het teken van de hessiaan:

- $\Delta_{(x_0, y_0)} > 0$ \Rightarrow Extremum!
MIN als $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 > 0$ MAX als $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 < 0$
Vergelijken met de leider (eerste rij, eerste kolom in de hess.)
- $\Delta_{(x_0, y_0)} < 0$ \Rightarrow Geen extremum, zadelpunt
- $\Delta_{(x_0, y_0)} = 0$ \Rightarrow Geen besluit

Differentiaal

Totale differentiaalvorm

definitie:

$$u(x, y)dx + v(x, y)dy \quad \text{a. s. a.} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

H25: Richtingsafgeleiden en gradiënt

Richtingsafgeleiden van een functie

Gradiënt

De **gradiënt** van f in (x_0, y_0) is de vector $\vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{1}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{1}_y$

Richtingsafgeleide

$$(D_{\vec{u}}f)_P = (\text{grad}f)_P \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 u_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 u_y = |(\text{grad}f)_P| \cdot \cos \alpha$$

De richtingsafgeleide in een bepaalde richting is dus de **component van de gradiëntvector** in die richting.

De gradiëntvector van een functie in een punt geeft de **richting** aan volgens dewelke de functie f het **snelst verandert** vanuit dat punt.

De zin van de gradiëntvector is **de zin van toename van f** vanuit het beschouwde punt.

De grootte van het maximale tempo van verandering is gelijk aan **de lengte van de gradiëntvector**.

Meetkundige toepassing van de gradiënt

Gradiëntvector is de **normaalvector van de niveaukrommen** van de functie.

raaklijn in een punt van een kromme met impliciete cartesische verg. $F(x, y) = 0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = 0$$

Functies van drie veranderlijken

$$\text{grad} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{1}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{1}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{1}_z$$

Gradiëntvector is de **normaalvector van de niveauoppervlakken** van de functie.

raakvlak in een punt van een kromme met impliciete cartesische verg. $F(x, y, z) = 0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0$$

H26: Gebonden extremumvraagstukken en de methode van Lagrange

Gebonden extremumvraagstuk

Methode 1

Uit de nevenvoorwaarde $g(x, y) = 0$ y bepalen als functie van x en extrema zoeken van $f(x, h(x))$

Methode 2

Multiplicatorenmethode van Lagrange.

$$\varphi(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Extremum als:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$$

Functies van drie veranderlijken

met één nevenvoorwaarde

$$\varphi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

met twee nevenvoorwaarden

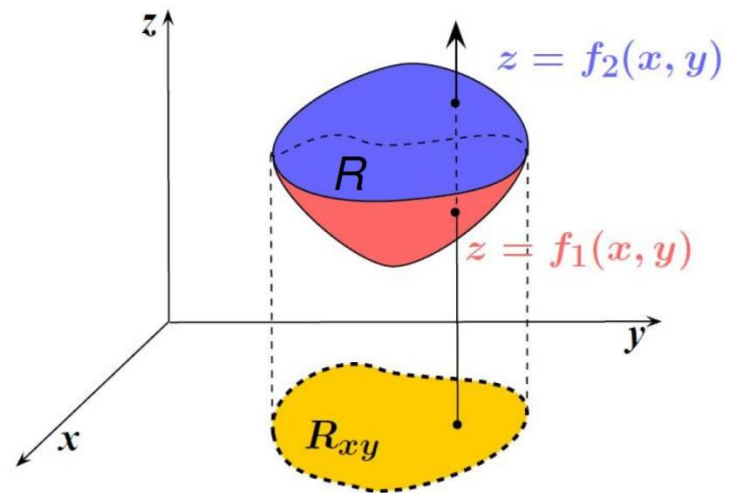
$$\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z)$$

H28

Tripelintegraal van een functie van drie veranderlijken

Tripelintegraal in cartesische coördinaten

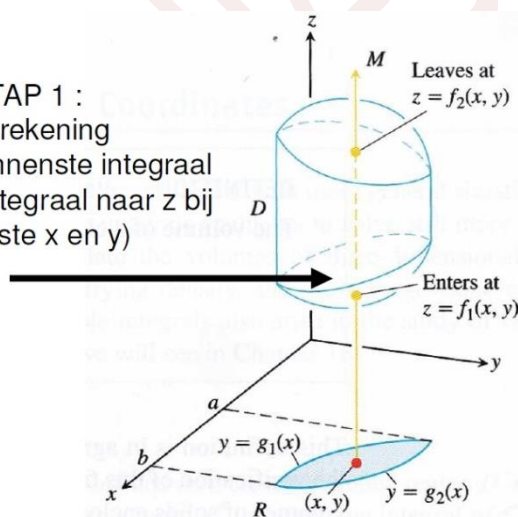
Praktische berekening



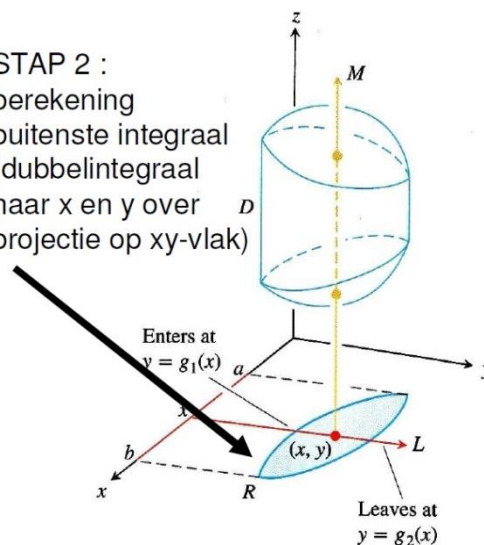
$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

(Dit hoeft niet perse in die volgorde.)

STAP 1 :
berekening
binnenste integraal
(integraal naar z bij
vaste x en y)



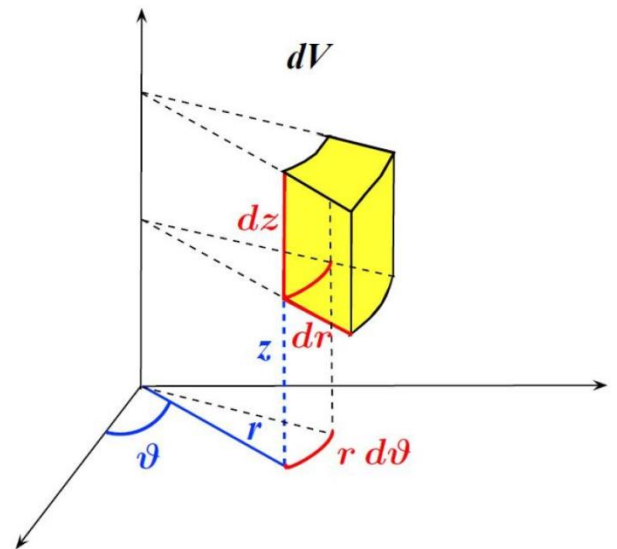
STAP 2 :
berekening
buitenste integraal
(dubbelintegraal
naar x en y over
projectie op xy-vlak)



Tripelintegraal in cilindercoördinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

$$dV = r \, dr \, dz \, d\theta$$



Integratie volgorde

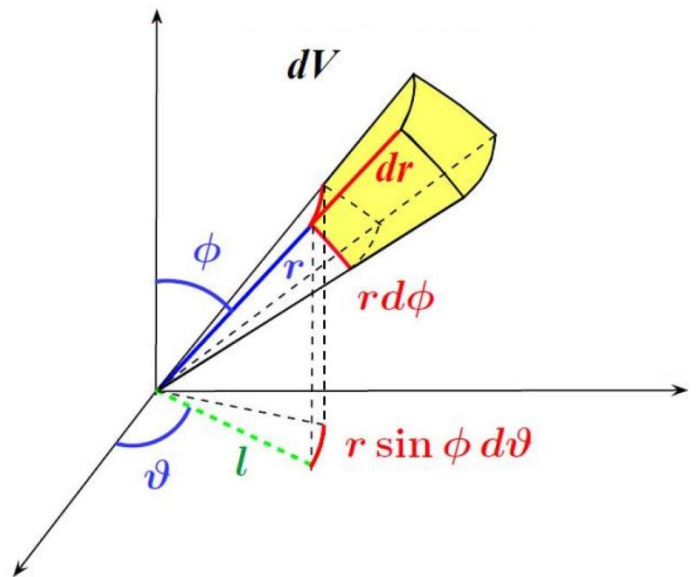
- Eerst naar z integreren (van onder naar boven doorlopen)
- Eerst naar r integreren (radiaal doorlopen vanop de z-as evenwijdig met het xy-vlak)

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr \right) dA$$

Tripelintegraal in bolcoördinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \sin \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \varphi\end{aligned}$$

$$dV = r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$



Integratie volgorde

- eerst integreren naar r
dan naar θ
dan naar φ
(lichaam wordt radiaal doorlopen vanuit de oorsprong)

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr \right) dA$$

Wanneer moeten we wat gebruiken?

Cilindercoördinaten

Lichamen met **axiale** symmetrie

Bolcoördinaten

Lichamen met **centrale** symmetrie

H29 (deel)

Toepassingen

Volume van een ruimtelijk gebied

$$\iiint_R 1 \, dV = \text{volume van } R$$

Massamiddelpunt van een ruimtelijk gebied

$$x_M = \frac{\iiint_R x \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_R \rho(x, y, z) \, dV} \quad y_M = \frac{\iiint_R y \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_R \rho(x, y, z) \, dV} \quad z_M = \frac{\iiint_R z \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_R \rho(x, y, z) \, dV}$$

Traagheidsmoment van een ruimtelijk lichaam t.o.v. een as

$$I_x = x_M = \iiint_R (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV$$

(analoog voor I_y en I_z)

Massa van een ruimtelijk gebied

$$m = \iiint_R dm = \iiint_R \rho(x, y, z) \, dV$$

Volume ruimtelijk gebied

Tripelintegraal naar dubbelintegraal (cilindrisch lichaam)

$$\text{Volume van } R = \iiint_R dV$$

$$= \iint_G \left(\int_{z=0}^{z=f(x,y)} dz \right) dA = \iint_G f(x,y) dA$$

Tripelintegraal naar enkelvoudige integraal (omwentelingslichaam)

$$\text{Volume van } R = \iiint_R dV$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_R r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=a}^{z=b} \left(\int_{r=0}^{r=f(z)} r \, dr \right) dz \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=a}^{z=b} \left(\frac{1}{2} [r^2]_0^{f(z)} \right) dz \, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{2} \int_{z=a}^{z=b} f(z)^2 dz \\ &= \pi \int_a^b f(z)^2 dz \end{aligned}$$